Universidade Federal de Uberlândia
Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações

- Processamento digital de sinais –
Capítulo 2 – Sinais e sistemas discretos

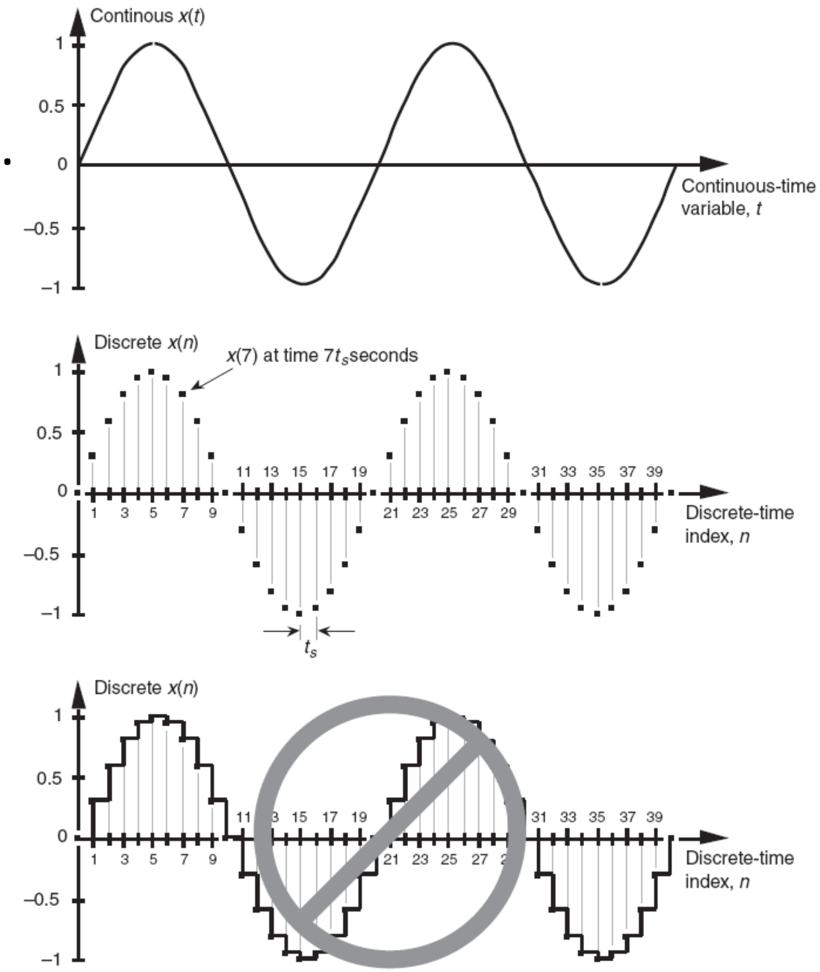
Prof. Alan Petrônio Pinheiro

1 – Sinais discretos

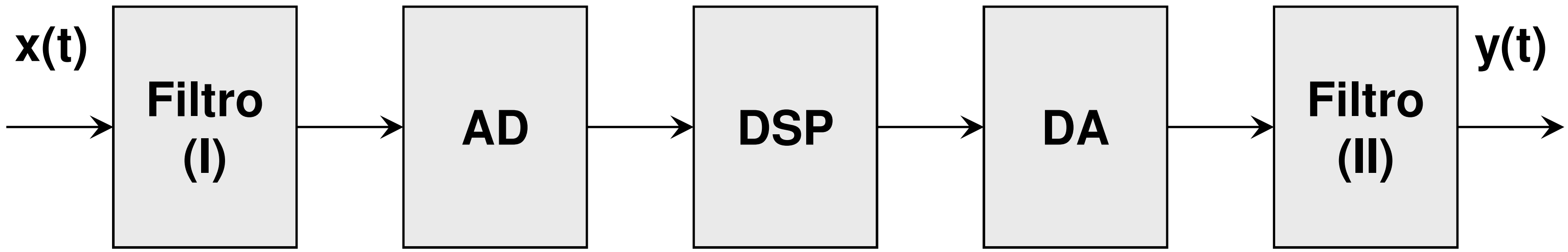
- Sinais analógicos x digitais
  - Contínuos x discreto
  - Admitido como sequência de números.
    $\{x[n]\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $n \in Z$

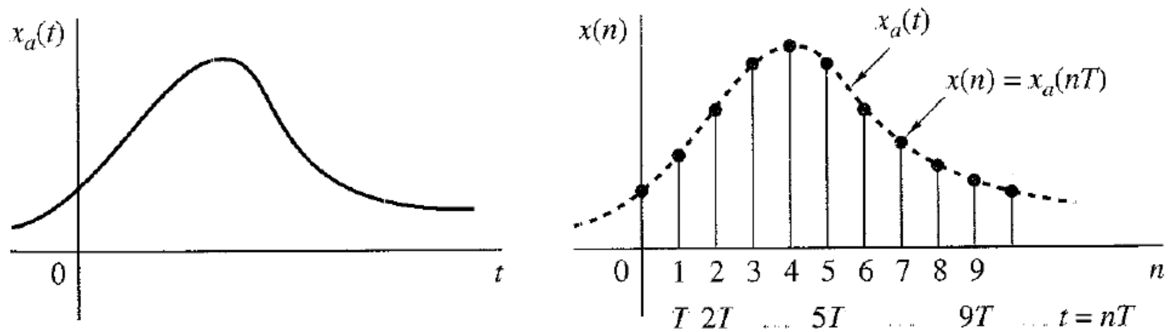
- Período amostragem: t_s

- Variáveis independentes: *t* e *n*
  - $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ radianos
  - $x[n] = \sin(2\pi f_0 n t_s)$ radianos
  - Logo: $t = nt_s$
  - $1/t_s >= 2.F_{MAX}$ (freq. máxima sinal)
  - "Domínio do tempo"



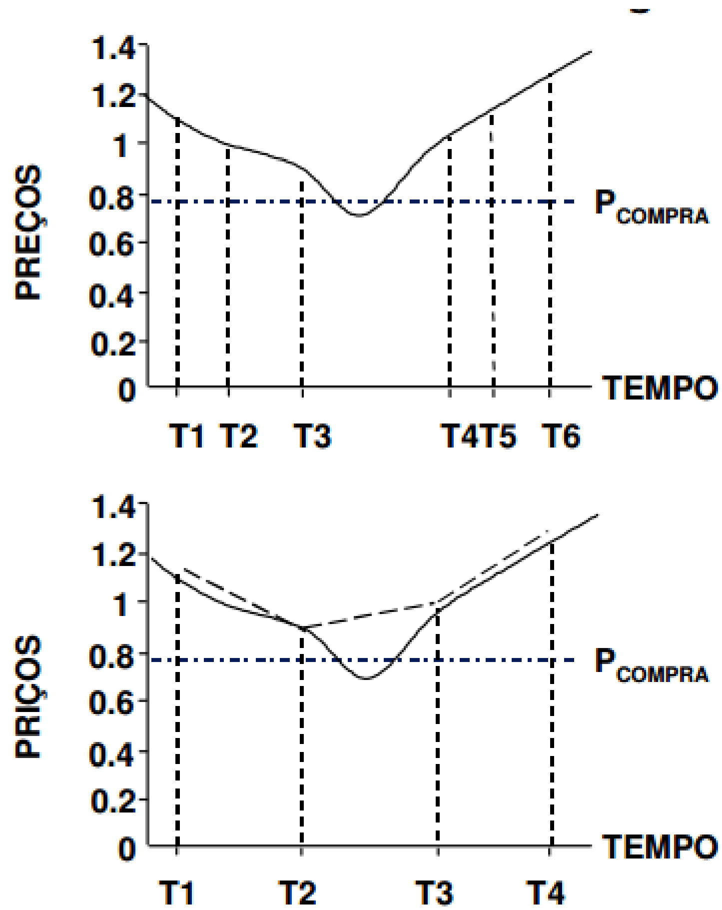
• Conversão AD e DA



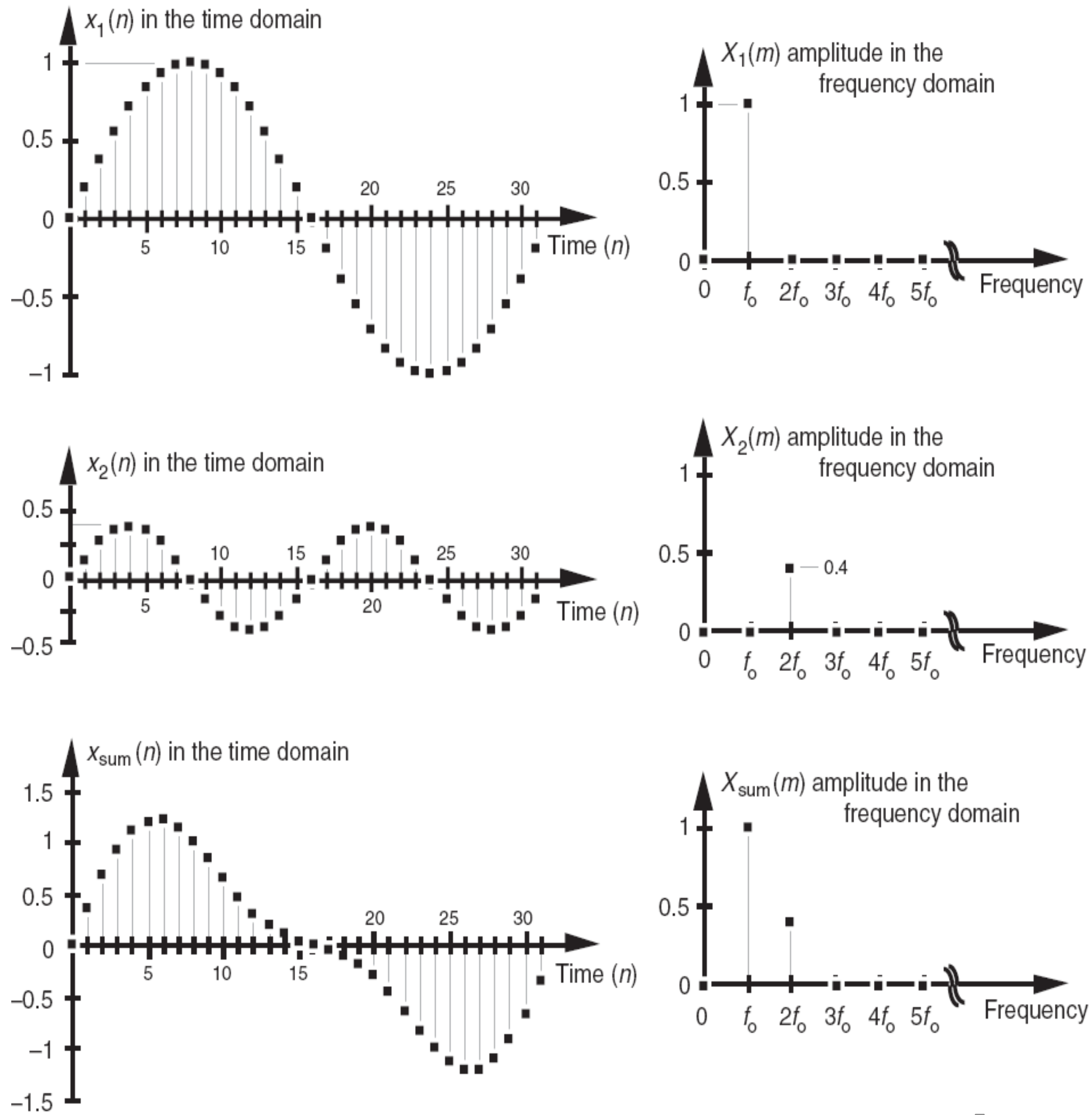


- **Filtro I : Filtro *anti-aliasing***
- **AD: Conversor analógico digital**
- **DSP: Computador digital ou processador digital de sinais**
- **DA: Conversor digital analógico**
- **Filtro II : Filtro *anti-imaging* (filtro de reconstrução)**

- Frequência de aquisição



- Sistema discreto: saída discretizada
  - y[n]=2x[n]-1
  - Equação de diferenças
- Tempo x frequência
  - Componente espectral
  - X(m)
- Formas sinal
  - Forma onda
  - Matematicamente
  - Espectro

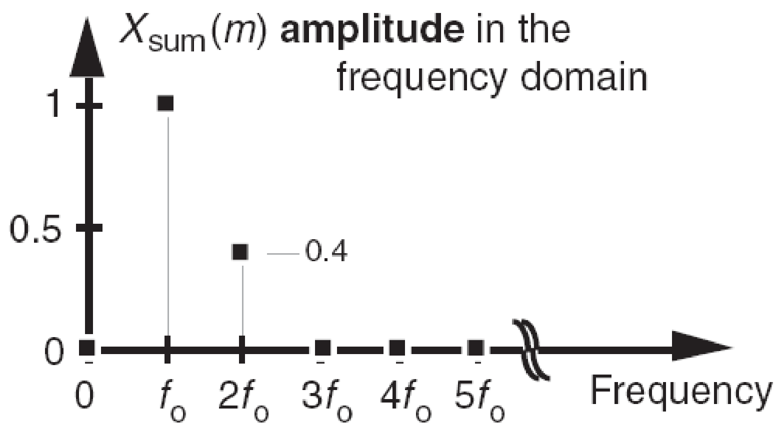


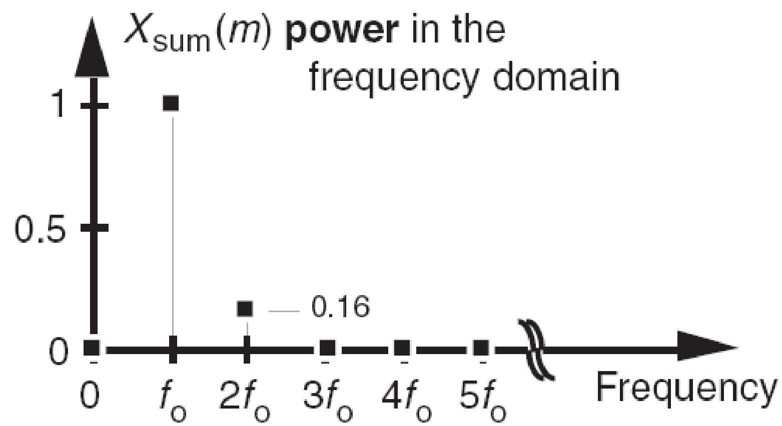
- Amplitude, magnitude e potência
    - Amplitude (distância e direção da origem)
    - Magnitude (distância sem direção)
    - Potência: proporcional ao valor quadrático

$$x_{pwr}[n]=|x[n]|^2$$

$$X_{pwr}[m]=|X[m]|^2$$

***Problema**: sinais com moderadas diferenças em amplitude terão diferenças aumentadas gerando valores muito grandes e pequenos em mesmo gráfico*





• Escala logarítmica:

- Proposta inicial: comparação entre potência de dois sinais P1 e P2

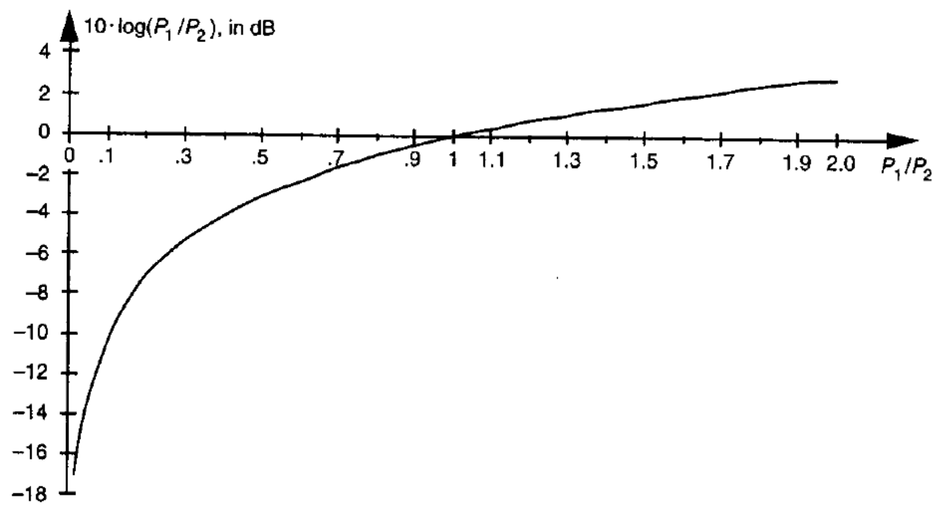
$$\textit{Diferença potência} = \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right) bells$$

- Ouvido humano era capaz de sentir uma diferença de 1/10 bells

$$\textit{Diferença potência} = 10.\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right) dB$$

Note que: (i) quando P1/P2 é pequena, temos um grande valor (em módulo) em dB

(ii) Quando P1/P2 não é tão pequena, temos evolução moderada em dB

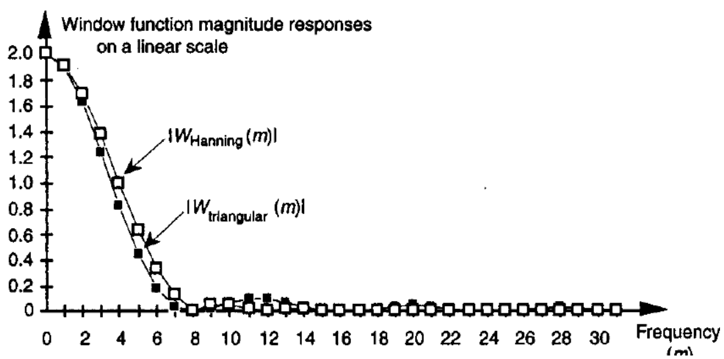


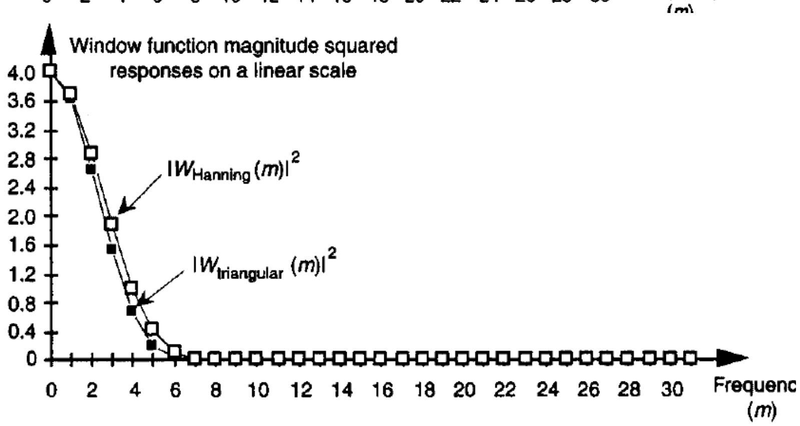
• Escala logarítmica (continuação):

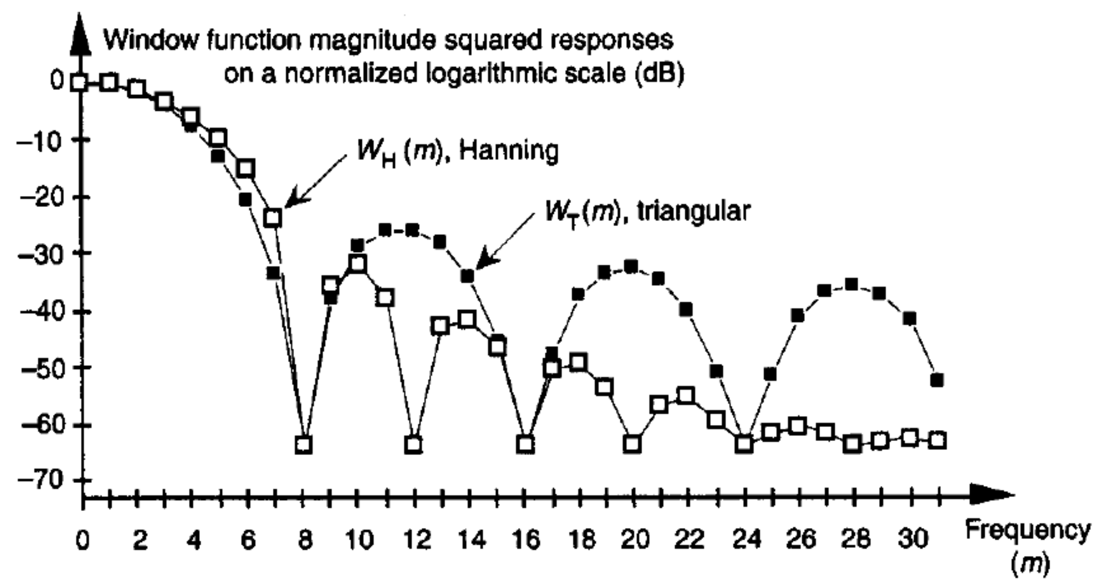
- A relação $x_{pwr}[n]=|x[n]|^2$ **não** representa a potência em seu sentido clássico (em watts), mas tem uma relação direta com esta.
- Potência de um sinal em dB é dada por:

Potência espectro sinal: $X_{dB}[m] = 10.\log_{10}(|X[m]|^2)dB = 20.\log_{10}(|X[m]|)$

- "Normalização" do espectro: $X_{dB\_normalizado}[m] = 20.\log_{10}\left(\dfrac{|X[m]|}{|X[0]|}\right)dB$







- Exemplo: comparação entre potência elétrica contínua e potência de um sinal

$$p(t) = v(t).i(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

$$\text{Energia}_{t_1<t<t_2} = \int_{t1}^{t2} \frac{v^2(t)}{R} dt$$

$$\text{Potência}_{t_1<t<t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t1}^{t2} \frac{v^2(t)}{R} dt$$

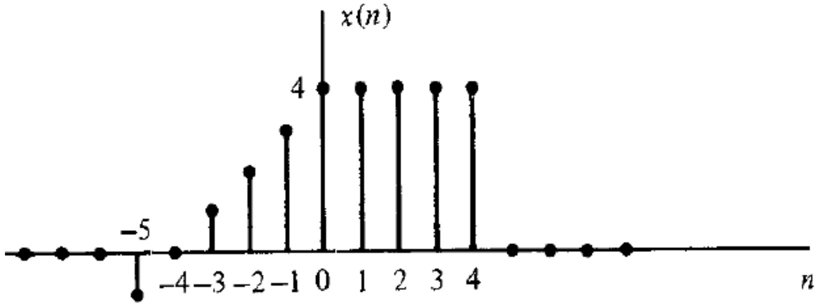
Tempo contínuo

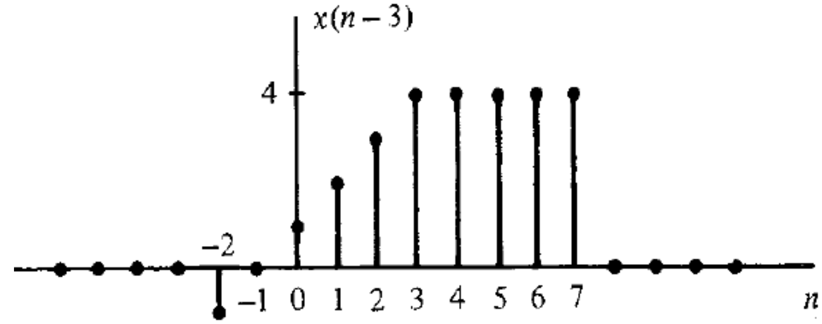
$$\text{Potência sinal}_{t_1<t<t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t1}^{t2} | x(t) |^2 \, dt$$

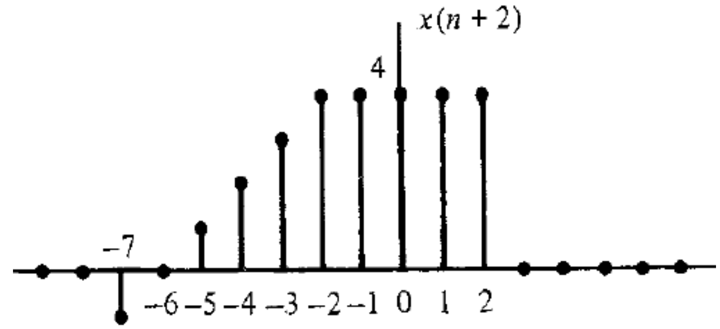
Tempo discreto

$$\text{Potência sinal}_{n_1<n<n_2} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} | x[n] |^2$$

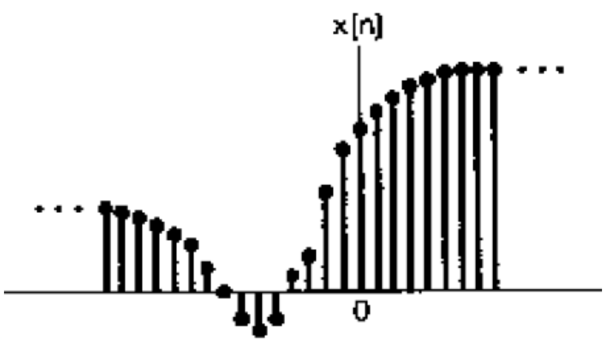
- Operações básicas (transformações) de sinais:
  - Deslocamento de um sinal

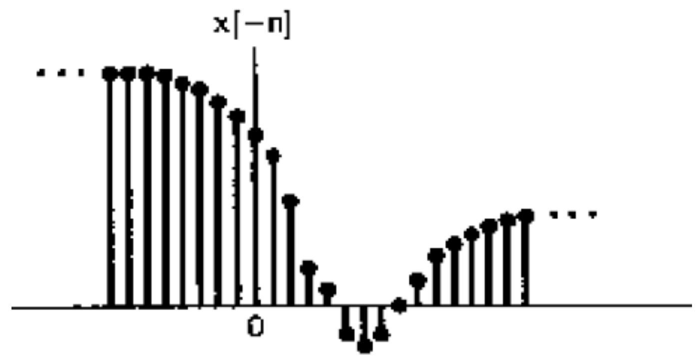




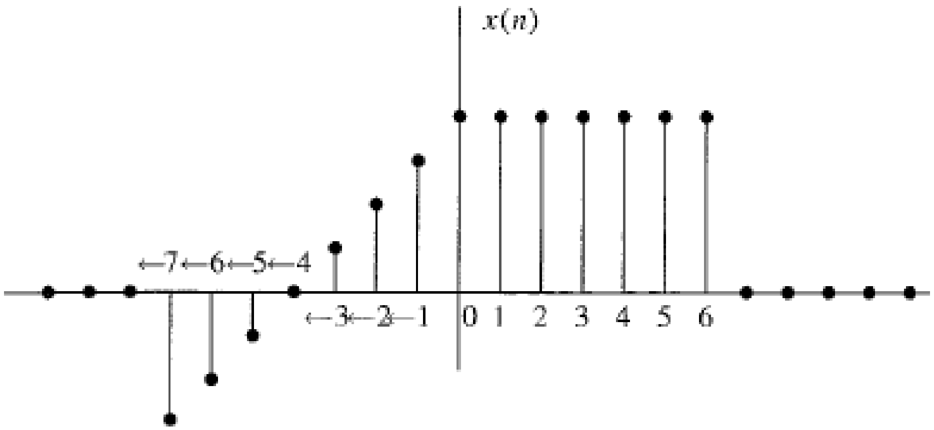


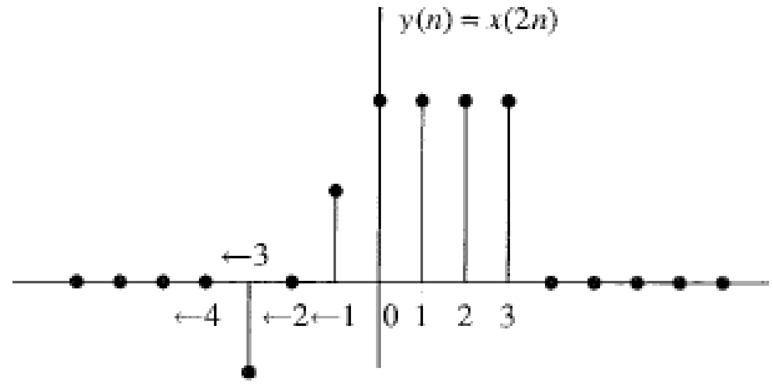
  - Reflexão: x[-n]



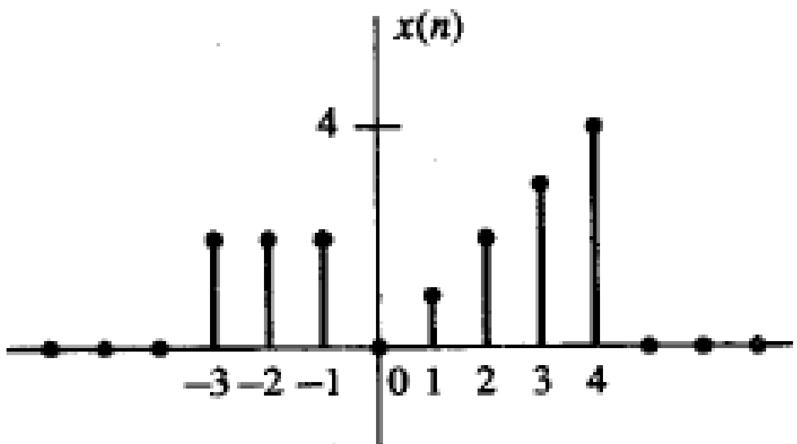


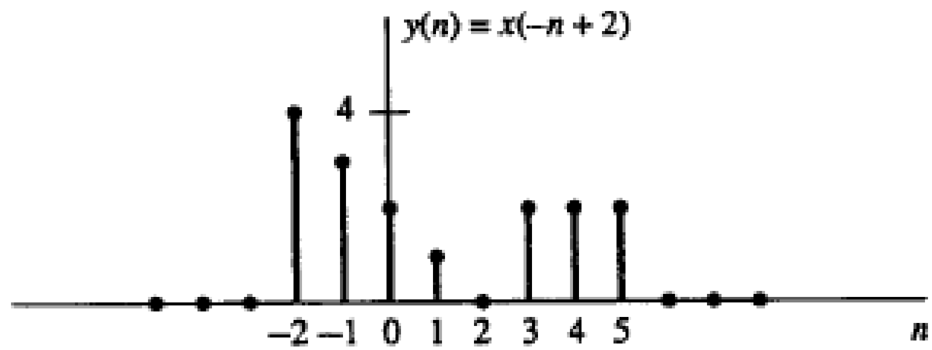
• Escala no tempo





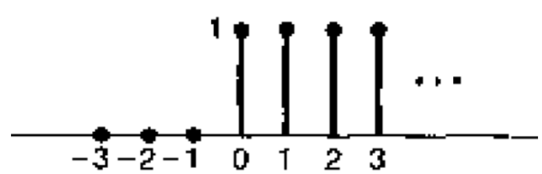
• Exemplo: calcule x[-n+2]





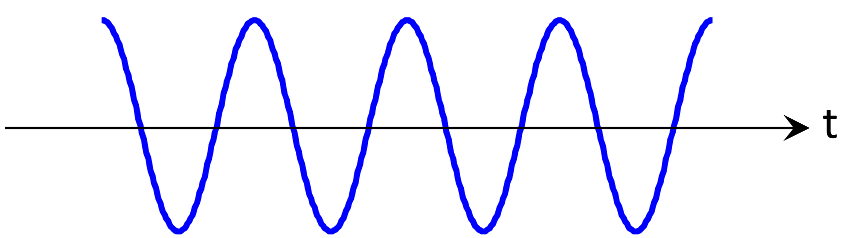
- Algumas características de sinais:
  - Periodicidade:
    - x(t)=x(t+T)=x(t+mT)
    - Período fundamental = menor valor positivo de T
    - x[n]=x[n+N]
  - Simetria
    - Par: x(-t) = x(t) ou x[-n] = x[n]
    - Ímpar: x(-t) = -x(t) ou x[-n] = -x[n]
    - Todo sinal pode ser decomposto em x[n]=par(x[n])+ímpar(x[n])
    - Onde: $Ev\{x[n]\} = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$ $Od\{x[n]\} = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$
  - Exemplo

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

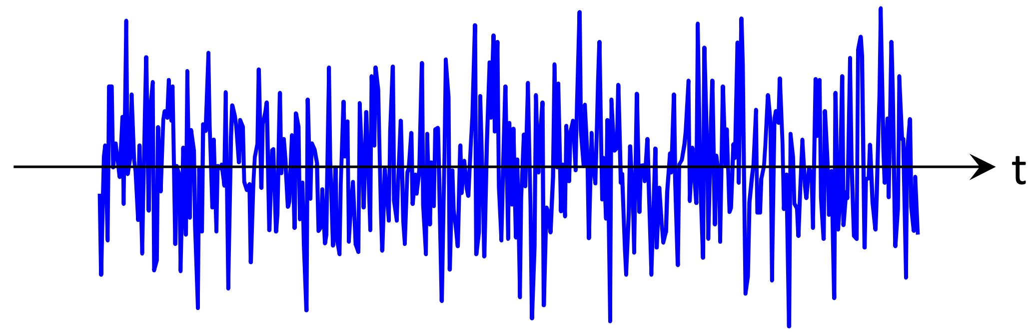


- Estocástico/randômico x determinístico
- Estacionaridade

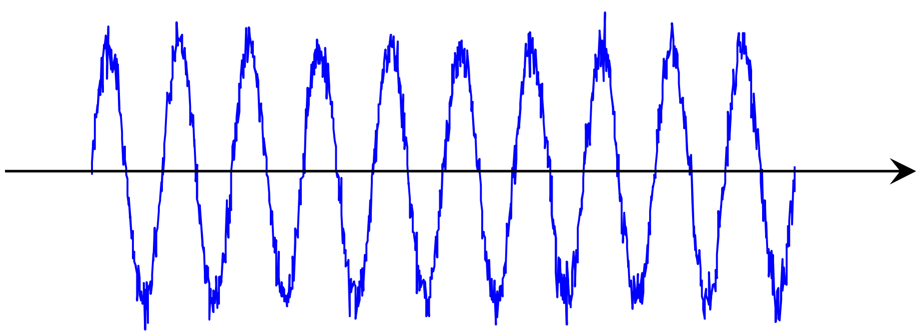
sinal senoidal



Ruído

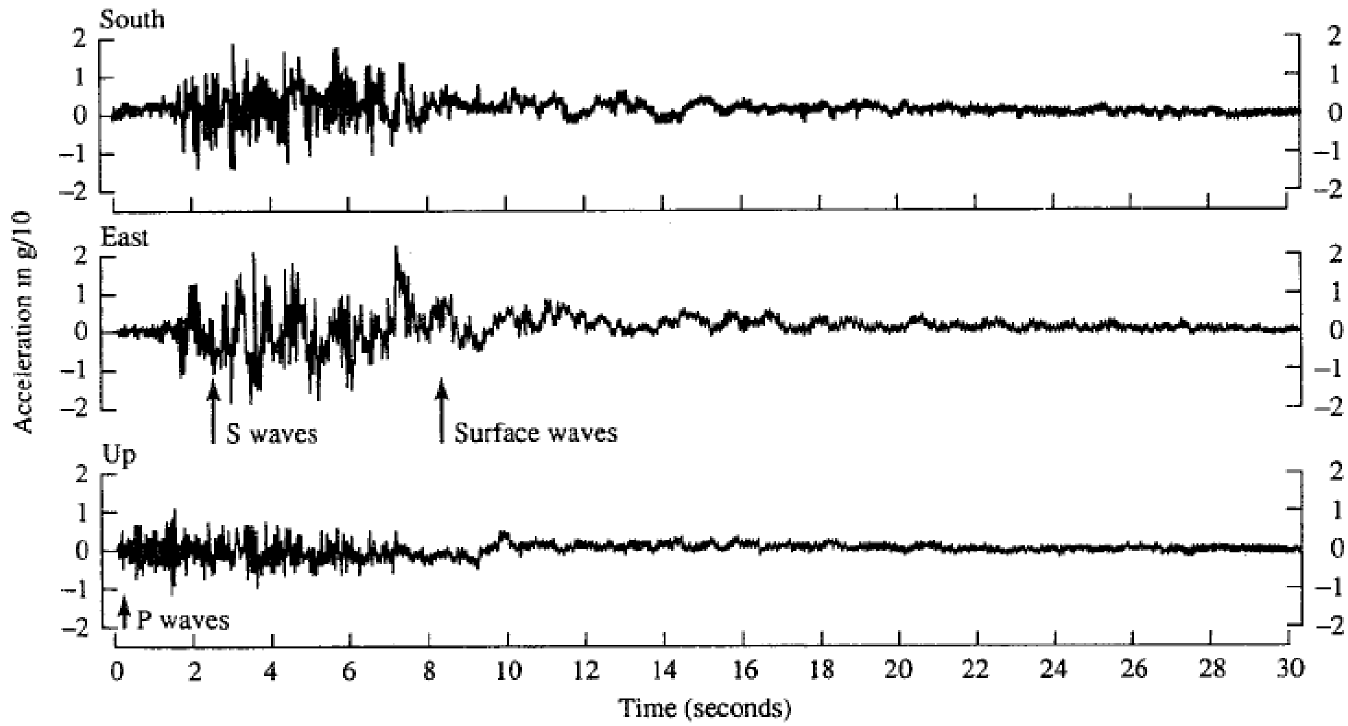


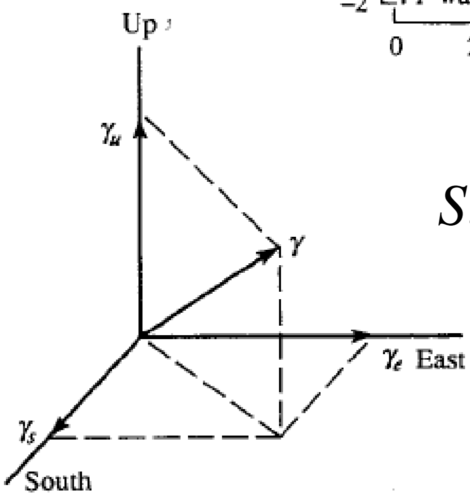
Sinal senoidal com ruído



Sinal de voz - “hoje é bom dia”

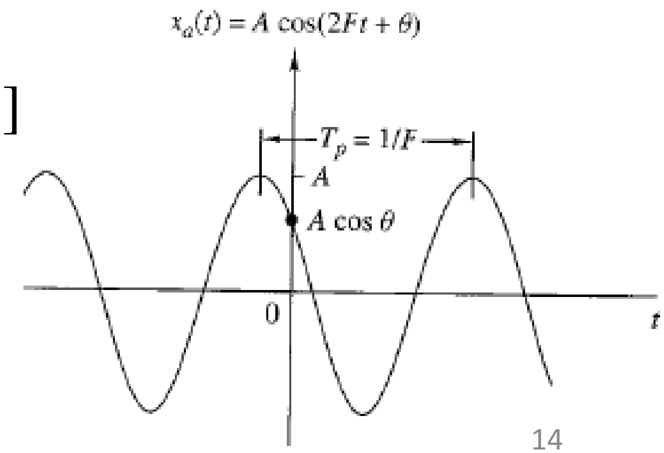
• Representações de sinais multidimensionais





$$Sinal = \sum_{i=1}^{N} A_i(t)\sin[2\pi F_i(t)t + \theta_i(t)]$$

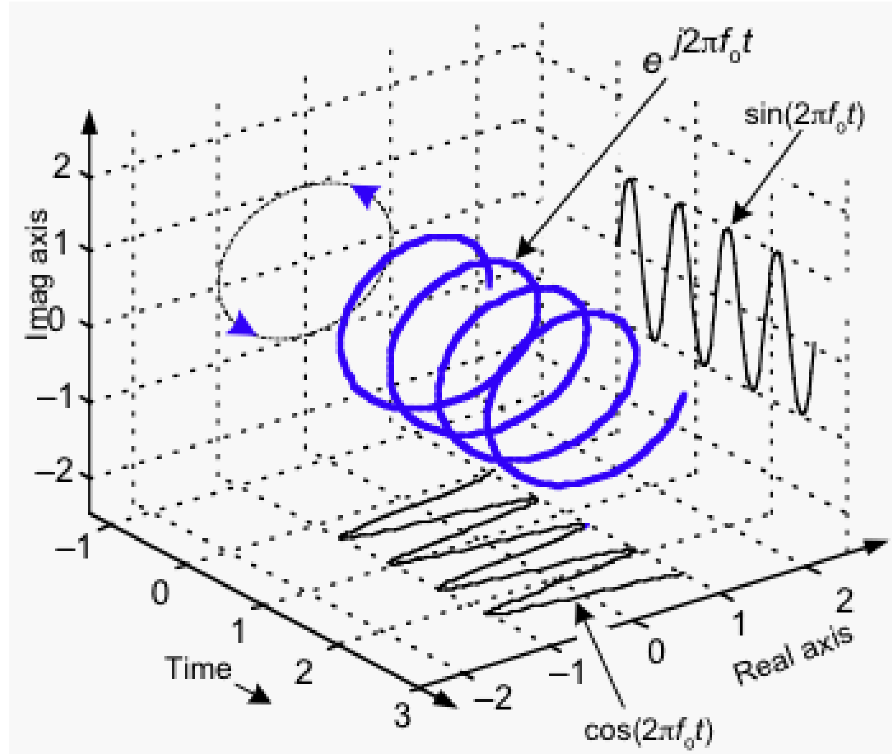
- Amplitude
- Frequência
- Fase



- Sinais complexos

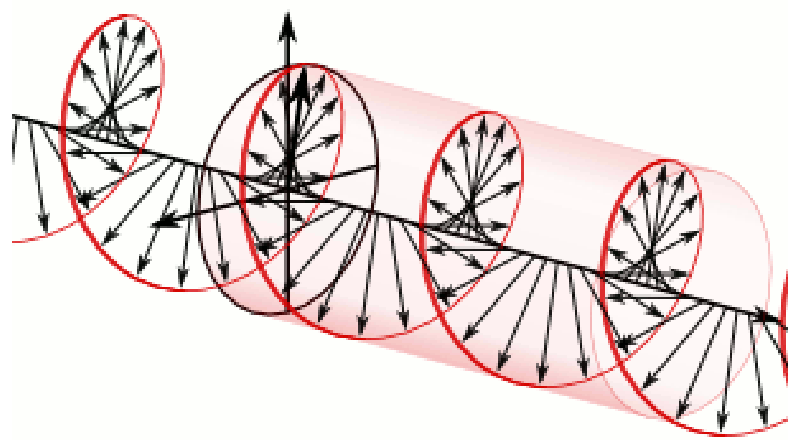
  – Sinal “real”:

$$s_1(t) = A.\sin(2\pi t)$$



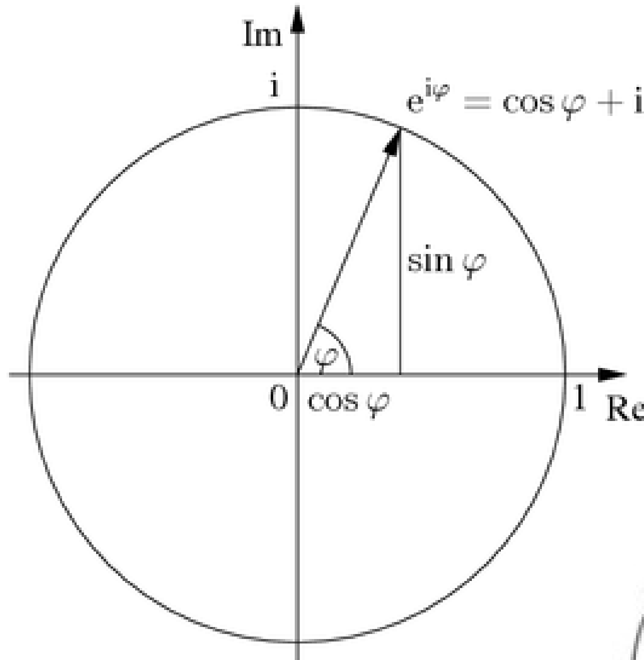
  – Sinal complexo:

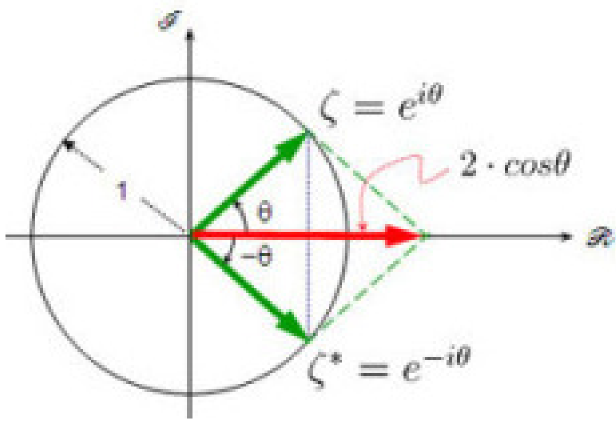
$$s_2(t) = Ae^{j2\pi t}$$
$$= A.\cos(2\pi t) + jA.\sin(2\pi t)$$

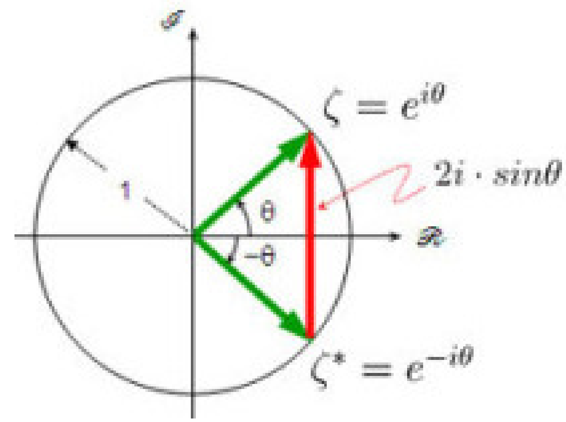


$$e^{j2\pi f_0 t} = e^{jw_0 t} = \cos(w_o t) + j\,\mathrm{sen}(w_0 t)$$

Forma fasorial



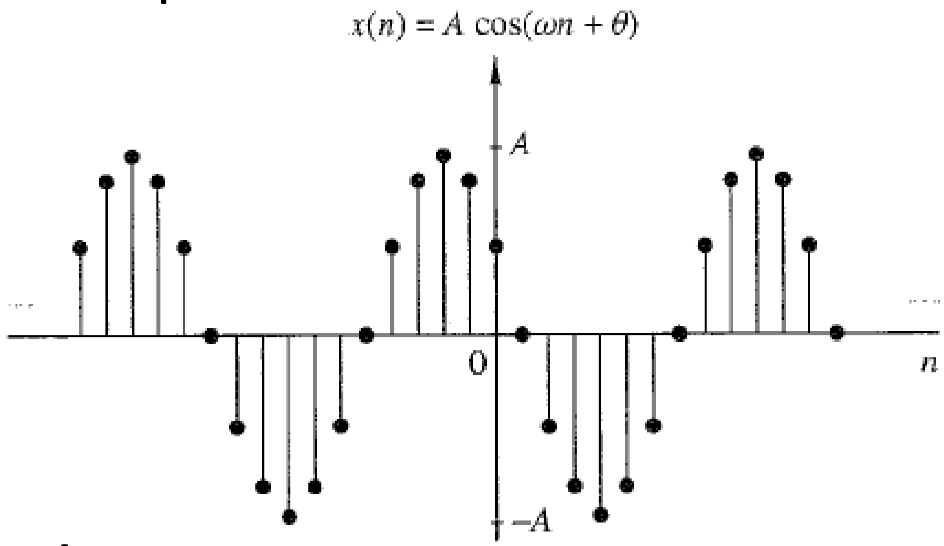




$$\cos(w_o t) = \frac{e^{jw_o t} + e^{-jw_o t}}{2}$$

$$\mathrm{sen}(w_o t) = \frac{e^{jw_o t} - e^{-jw_o t}}{2j}$$

- Versão discretizada
  - Exemplo: $$x[n] = A\cos(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{3})$$
    - w=π/6 radianos por amostra ou
    - f=1/12 ciclos por amostra



- Periodicidade

$$x[n+N] = x[n]$$

- Propriedade: em sinais discretos a frequência w varia entre – π e π. Assim sendo:

$$\cos[(w_0 + 2\pi)n + \phi] = \cos[w_0 n + 2\pi n + \phi] = \cos[w_0 n + \phi]$$

Isto indica que todas sequências

$$x_k(n) = \cos[w_k n + \phi] \qquad \text{para k} = 0,1,2,...$$

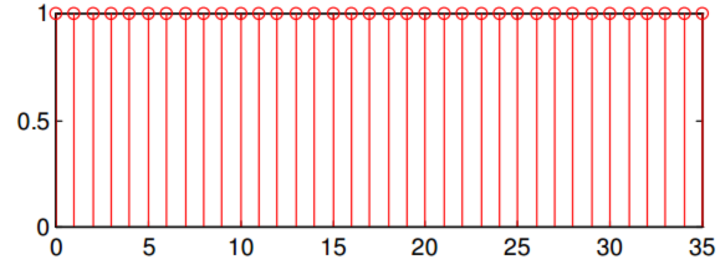
onde

$$w_k = w_0 + 2\pi k \qquad \text{para} - \pi \leq \mathrm{w}_0 \leq \pi$$

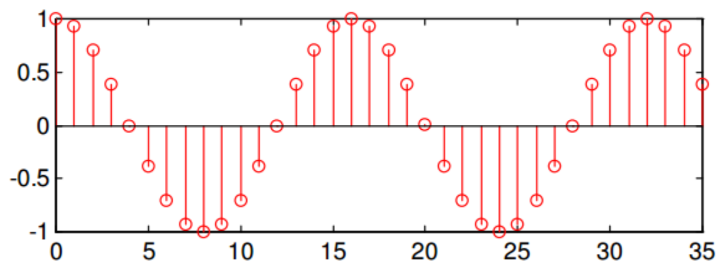
são iguais. Isto implica dizer que:

$$-\pi \leq \mathrm{w} \leq \pi$$

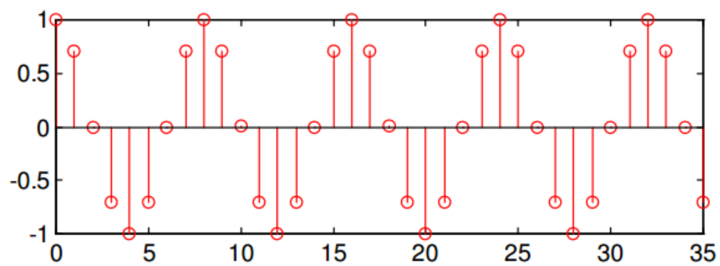
$$-1/2 \leq f \leq 1/2$$



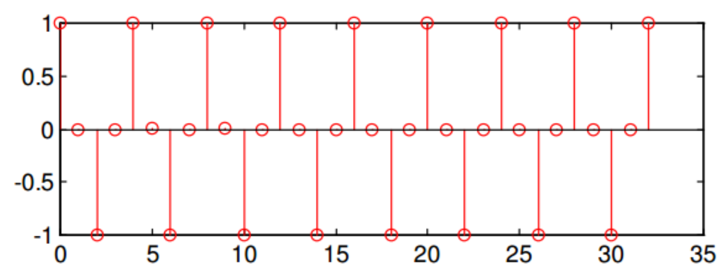
$$w_0 = 0 = 2\pi$$



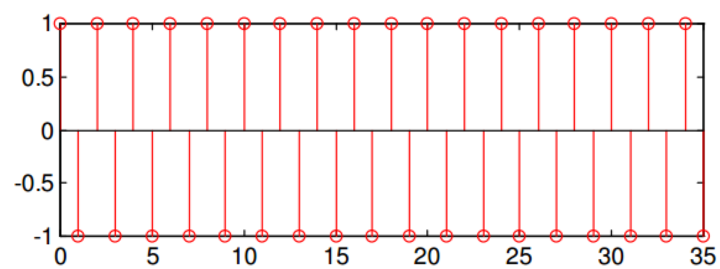
$$w_0 = \frac{\pi}{8}$$



$$w_0 = \frac{\pi}{4}$$



$$w_0 = \frac{\pi}{2}$$



$$w_0 = \pi$$

- Sinais harmonicamente relacionados
  - Grupo de sinais complexos cujas frequências fundamentais são múltiplas
  - Componentes analógicas: $s_k(t) = e^{j2\pi(F_0 k)t}$ para $\mathrm{k} = 0, 1, 2, \ldots$
  - Série de Fourrier:

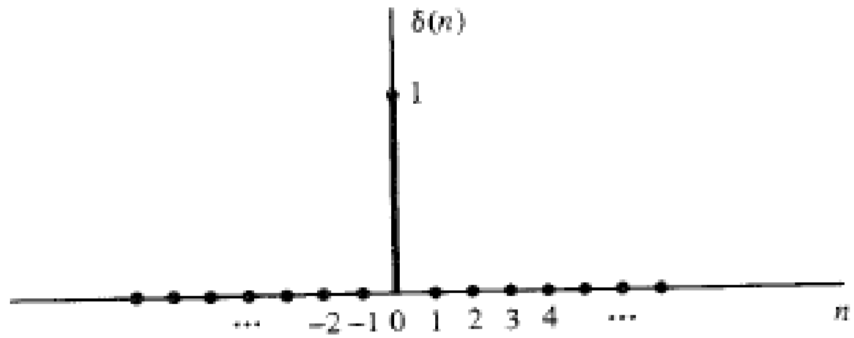
$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{c_k s_k(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{c_k e^{j2\pi(F_0 k)t}}$$

  - Série discreta de Fourrier:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{c_k s_k}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{c_k e^{j2\pi F_0 kn}} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{c_k e^{j2\pi \frac{1}{N} kn}}$$

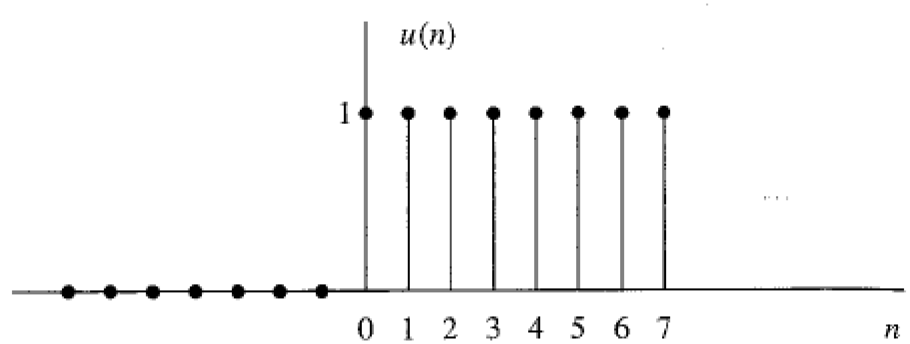
- Sinais "especiais"
  - Sequência amostra unitária (impulso unitário)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{para n} = 0 \\ 0, & \text{para n} \neq 0 \end{cases}$$



  - Degrau unitário

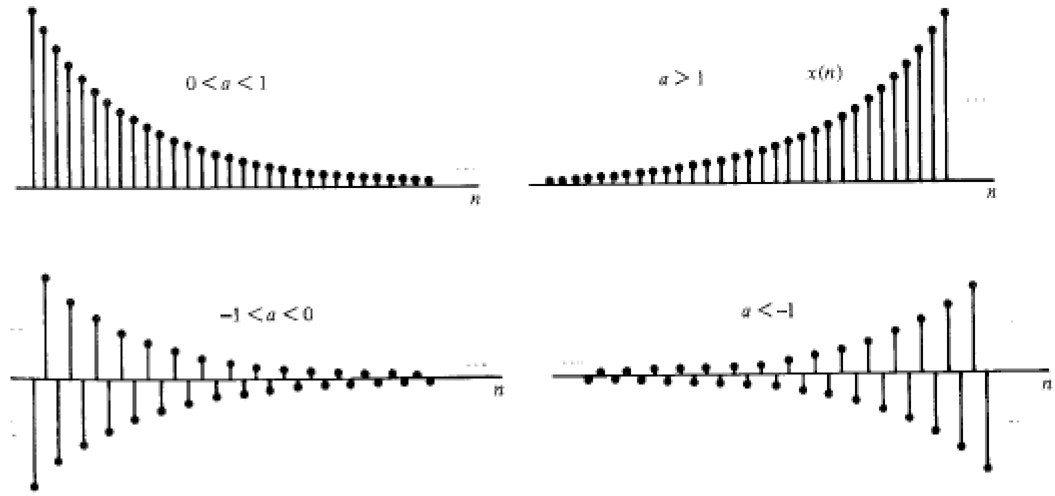
$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{para n} \geq 0 \\ 0, & \text{para n} < 0 \end{cases}$$



– Sinal exponencial

- Real:

$$x[n] = a^n$$

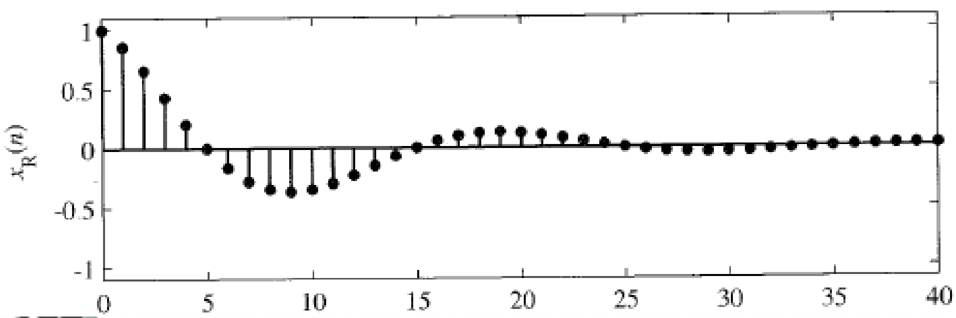


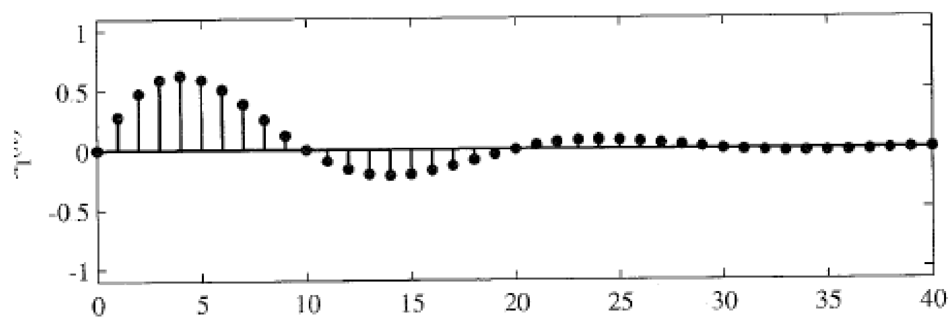
- Imaginário:

$$x[n] = (re^{j\theta})^n = r^n e^{j\theta n}$$
$$= r^n(\cos\theta n + j\sin\theta n)$$

$$\mathrm{Real}(x[n]) = r^n\cos\theta n$$
$$\mathrm{Img}(x[n]) = r^n\sin\theta n$$

Exemplo: $x[n] = \left(0.9e^{j\frac{\pi}{10}}\right)^n$





2 – Sistemas discretos

- Definição:

$$y[n] = \tau(x[n])$$

- Classificação:
  - Linearidade - Invariância - Causalidade - Estabilidade

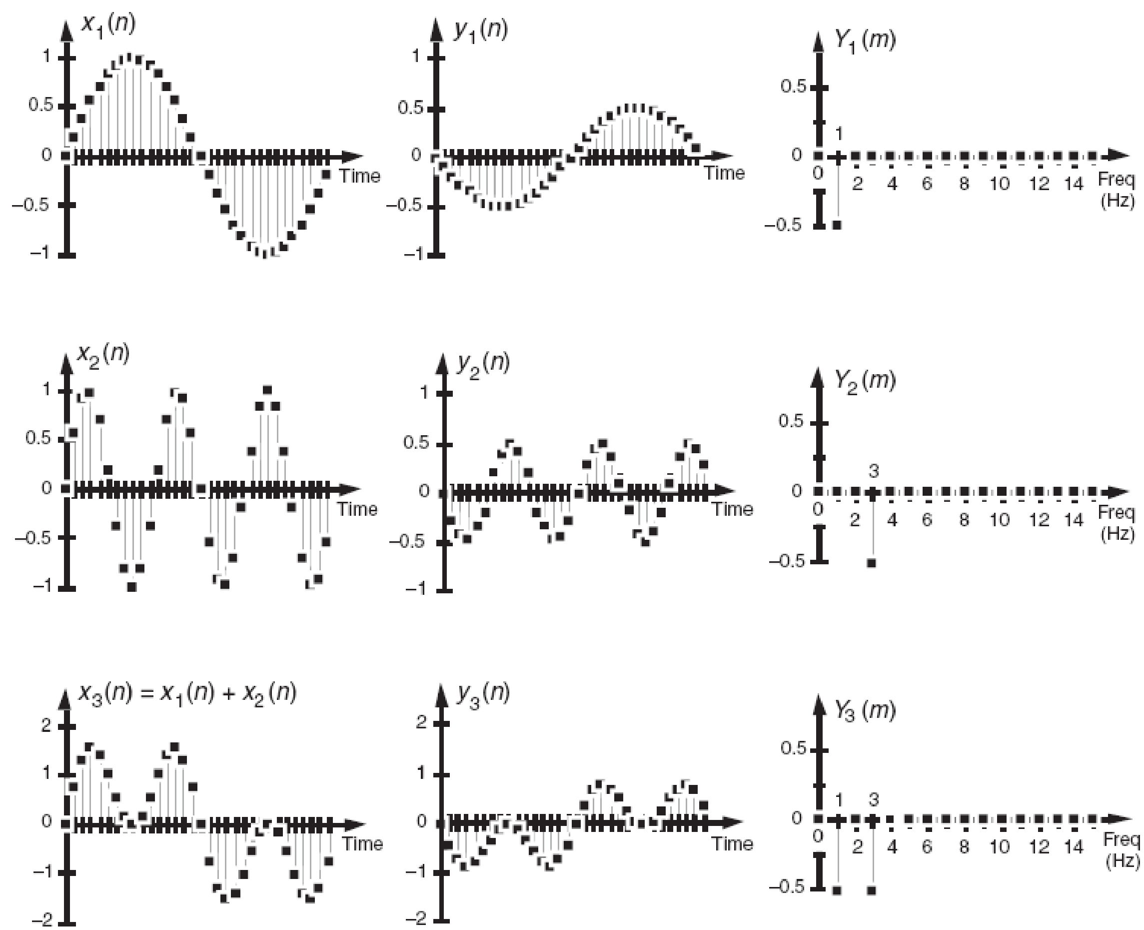
- Sistemas LTI (lineares e invariantes)
  - Caracterizados pela resposta à amostra unitária/impulso unitário gerando a resposta impulsiva.
  - Relação entrada-saída é dada pela “convolução”

- Linearidade

$$T\left[a_1 x_1(n)+\cdots+a_M x_M(n)\right]=a_1 T\left[x_1(n)\right]+\cdots+a_M T\left[x_M(n)\right]$$
$$=a_1 y_1(n)+\cdots+a_M y_M(n)$$

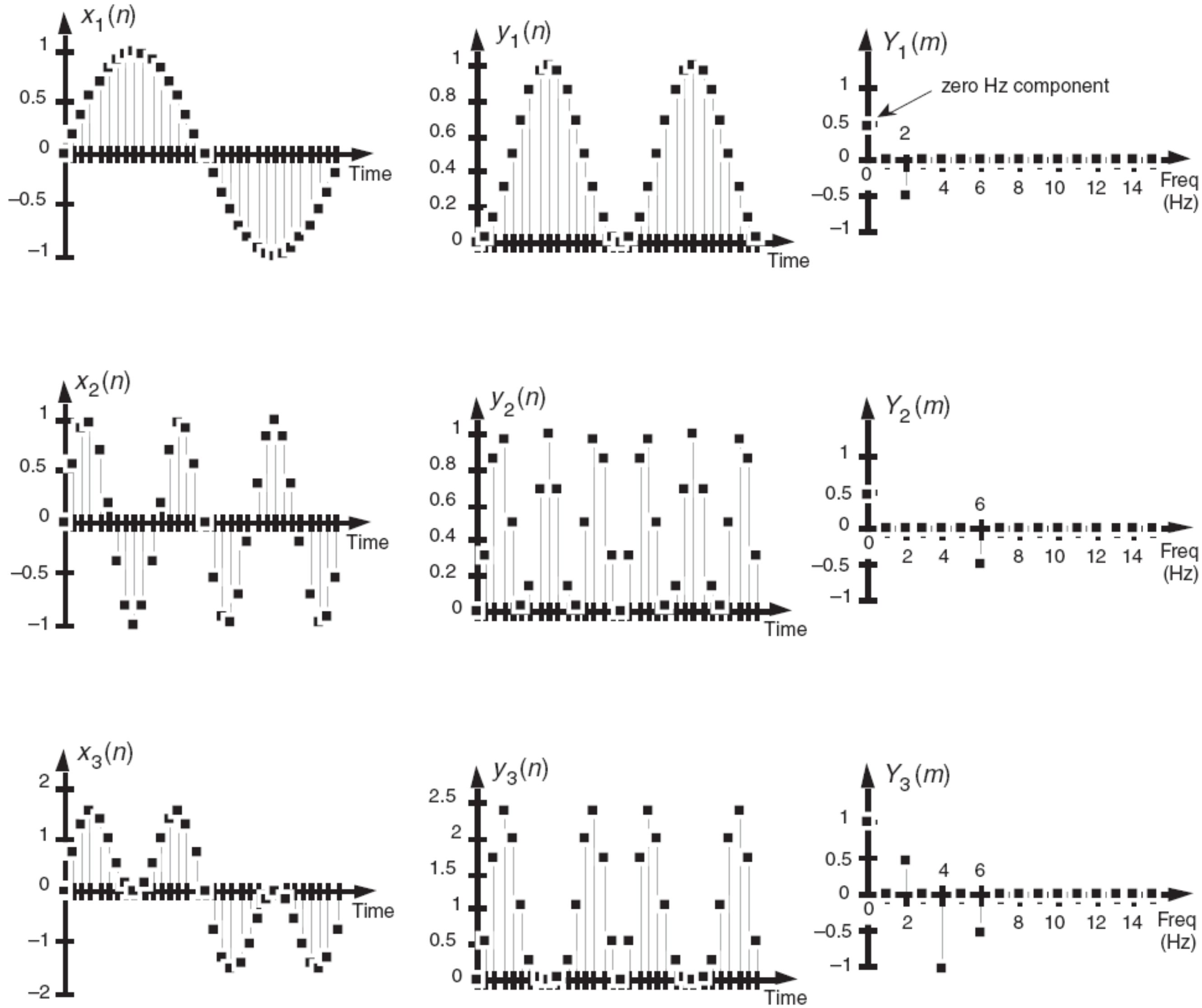
- Exemplo sistema linear:

$$y[n]=\frac{-x[n]}{2}$$



- Exemplo de sistema não-linear:

$$y[n] = x[n]^2$$

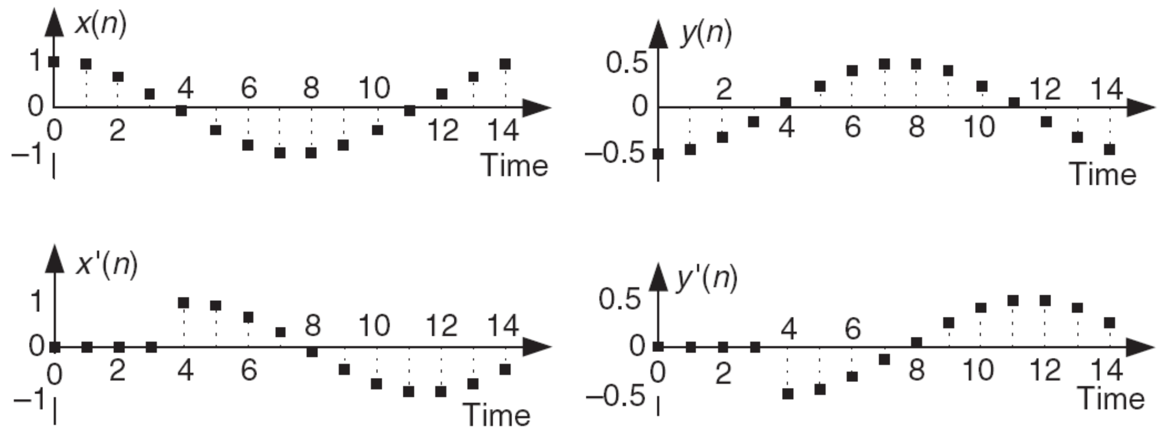


Lembrando que: $\sin(a).\sin(b) = \frac{\cos(a-b)}{2} - \frac{\cos(a+b)}{2}$

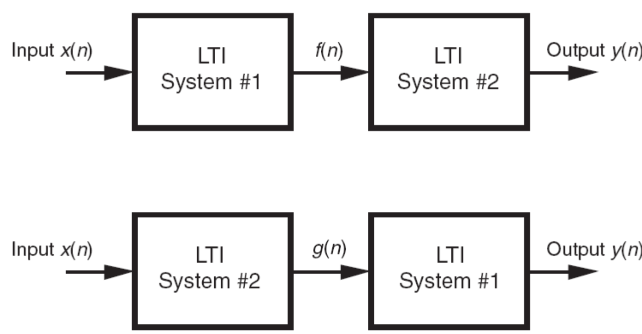
- Sistemas invariantes no tempo:

$$y(n) = T[x(n)] \quad \Rightarrow \quad T[x(n-n_d)] = y(n-n_d)$$

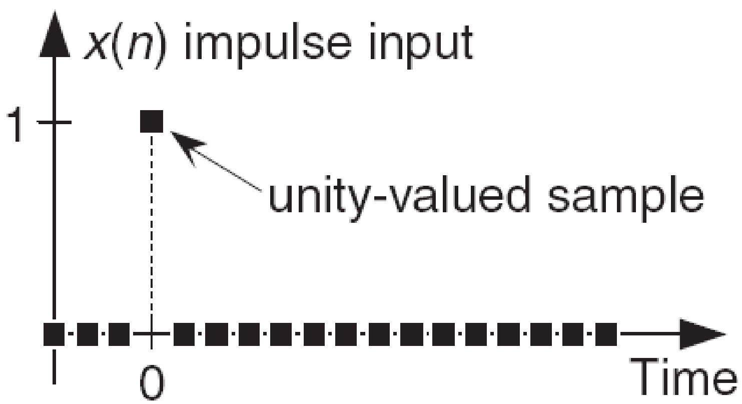
  - Exemplo de sistema invariante: nova entrada x'[n] = x[n-4] para y[n] = -x[n]/2. A saída acompanha o deslocamento da entrada ?

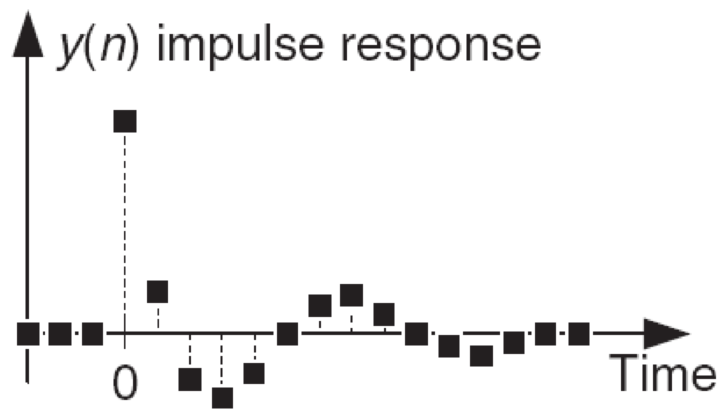


- Propriedade comutativa de sistemas LTI

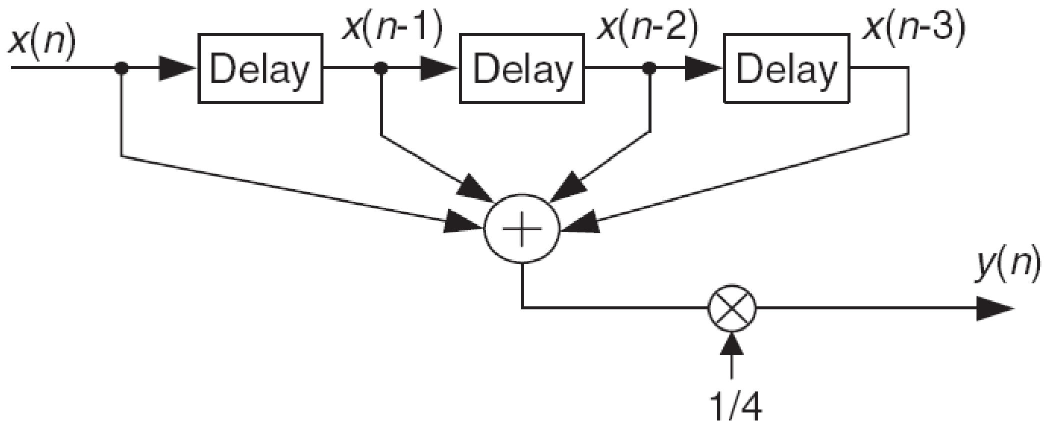


- Casualidade: $y[n] = \tau[x[n], x[n-1], x[n-k]...]$
- Estabilidade: entrada limitada, saída limitada
  - Ex.: $y[n] = y[n-1]^2 + x[n]$
- Considerações importantes sobre análise de sistemas LTI
  1. **uma vez conhecida a "resposta ao impulso unitário" (ou resposta impulsiva) o sistema pode ser completamente caracterizado;**
  2. **saída do sistema: convolução da entrada com a resposta impulsiva;**
  3. **Dada a resposta impulsiva no domínio do tempo, sua resposta em frequência equivale a transformada discreta de Fourier de sua resposta impulsiva.**

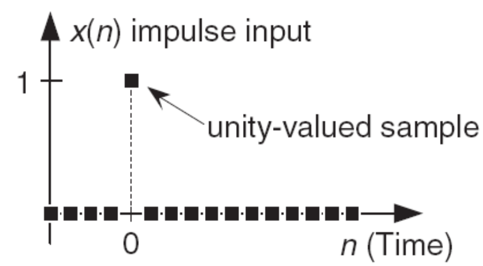




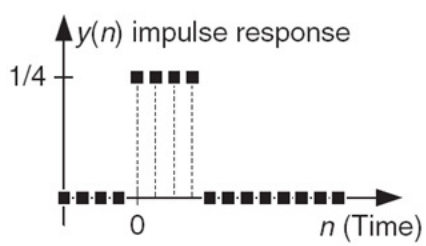
- Exemplo: analisar o comportamento do sistema abaixo:

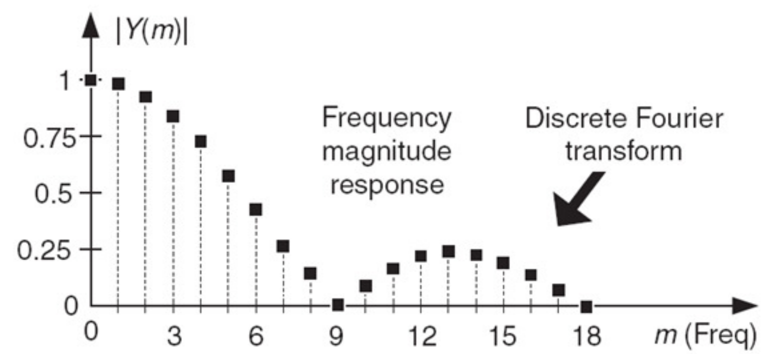


Considere a entrada impulsiva



A resposta será



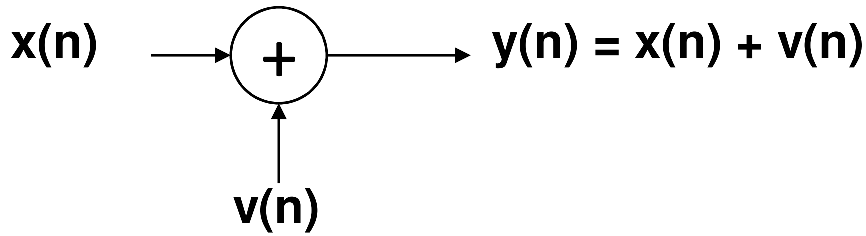


- Discretização de sistemas: equação de diferenças

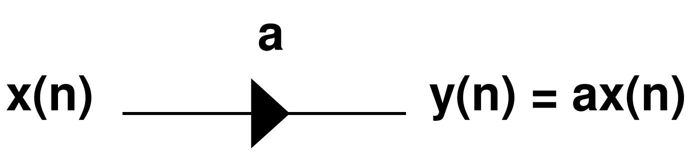
$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \longleftarrow \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x[n]-x[n-1]}{t_s}$$

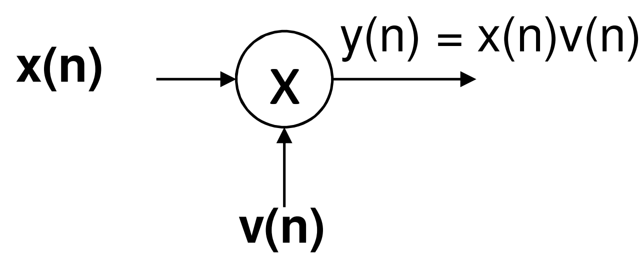
- Diagramas de bloco

Bloco somador :

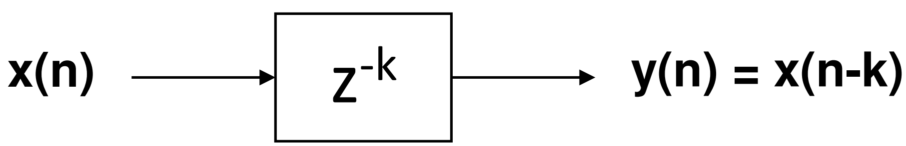


Multiplicador :





Bloco de atraso:



O operador z^{-k} indica um atraso de k amostras no sinal e ficará esclarecido no estudo da transformada z.

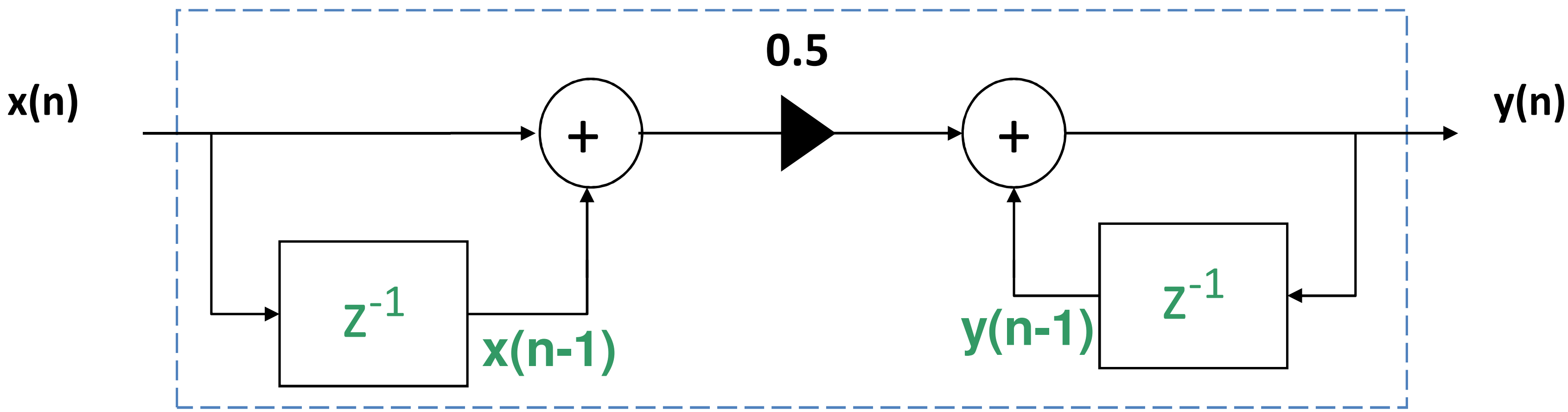
Exemplo: Represente em diagrama de blocos o seguinte sistema:

$$y(n) = y(n-1) + 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$$

Rearranjando a equação:

$$y(n) = y(n-1) + 0.5[x(n) + x(n-1)]$$

portanto tem-se o seguinte de blocos:



Observe que foi economizado um bloco multiplicador.

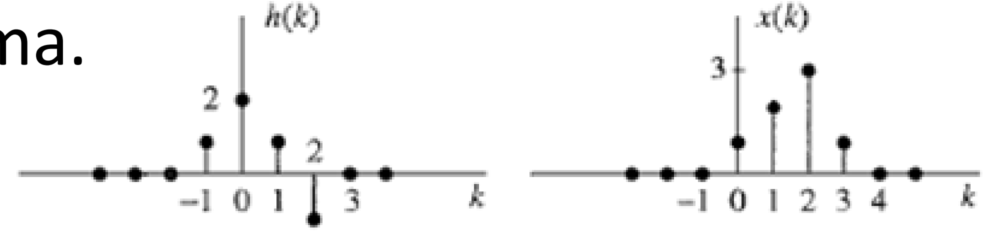
- Soma de convolução
  - Seja h(n) a resposta à excitação δ(n)
  - Calcular a saída do sistema no "instante" $n=n_0$ faça:

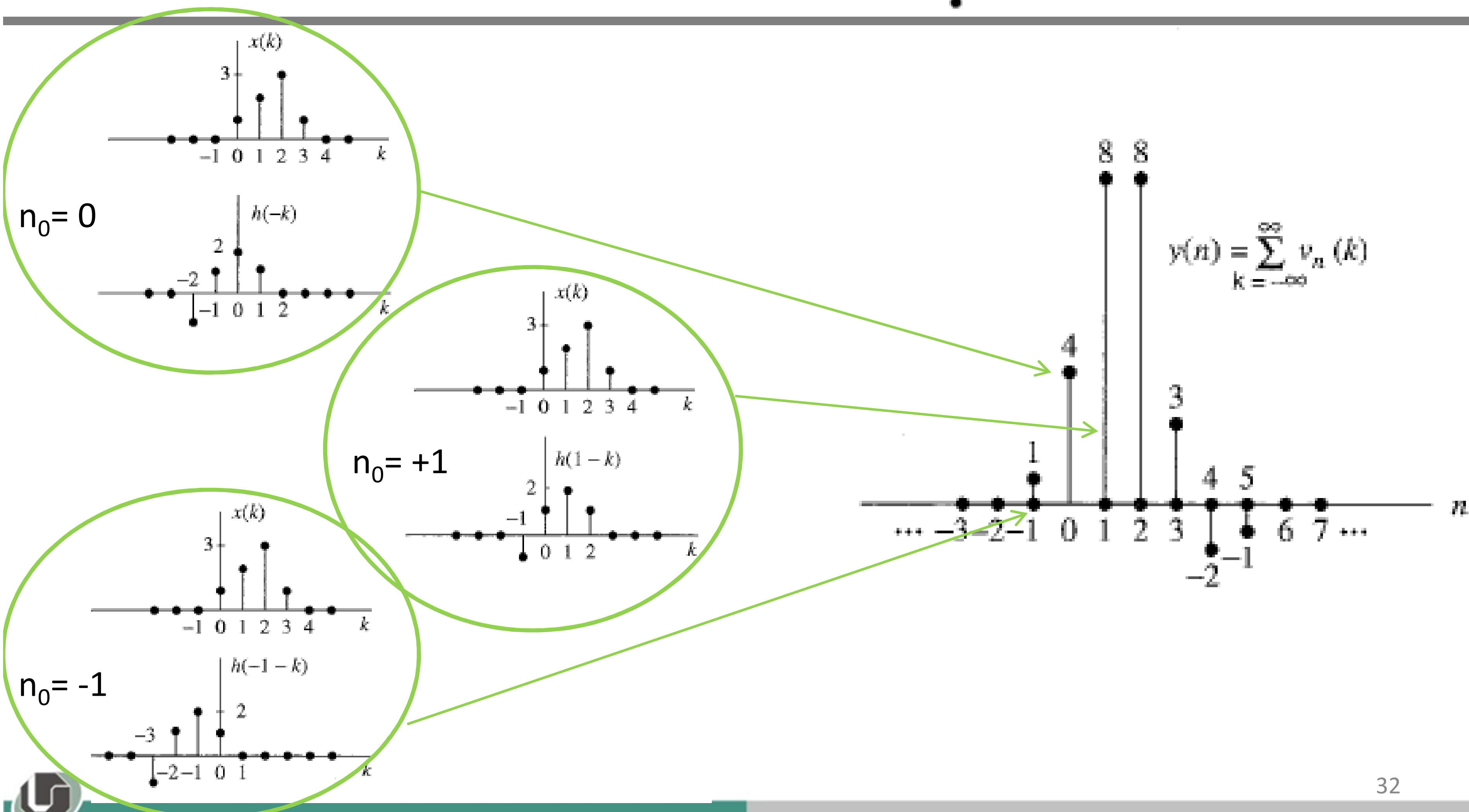
$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k) = x(n) * h(n)$$

Passos:

- 1. Rebate-se h(k) em torno do índice zero ⇒ h(-k)
- 2. Desloca-se h(-k) por n_0 amostras (à direita ou à esquerda)
- 3. Multiplica-se cada elemento x(k) por $h(n_0\text{-}k)$ para se obter a sequência produto x(k) $h(n_0\text{-}k)$
- 4. Soma-se todos os valores da sequência produto ⇒ $y(n_0)$

- Exemplo: considere a entrada e resposta impulsiva abaixa. Determine a saída do sistema.



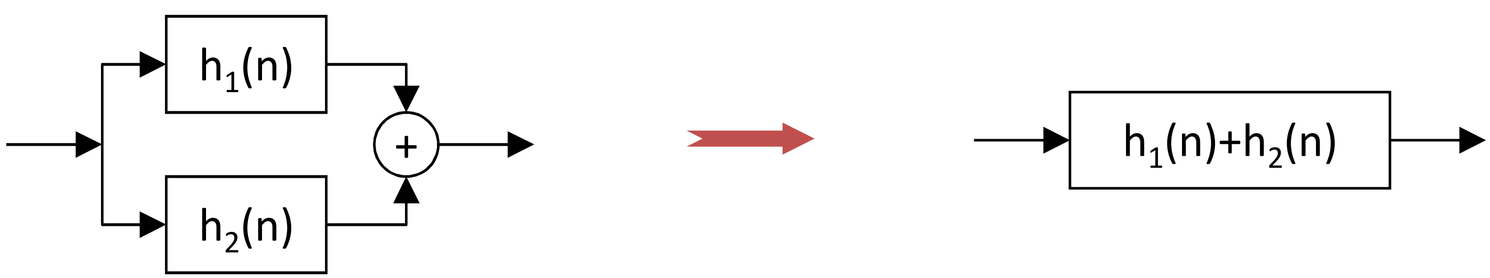


Propriedades da Convolução e Interconexão de Sistemas LTI

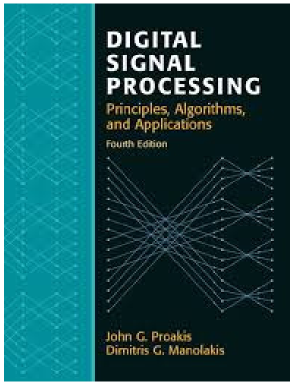
- Comutativa: $$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

- Associativa: $$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

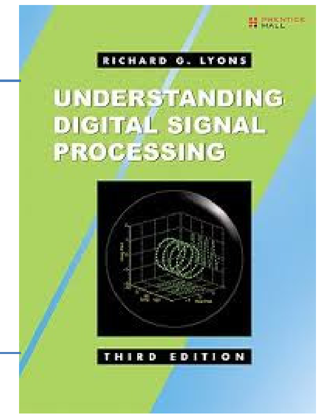
- Distributiva: $$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$



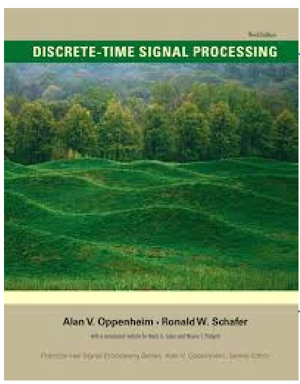
Referencias para leitura:



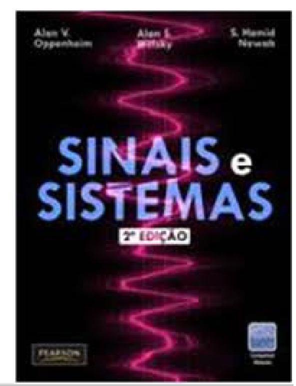
- Proakis//Manolakis (4ª edição)
  - Cap. 1, seções 1.1, 1.2 e 1.3
  - Cap. 2, seções 2.1, 2.2 e 2.3



- Lyons (3ª edição)
  - Cap. 1 todo



- Oppenheim (3ª edição, Discrete-time...)
  - Cap. 2, seções 2.1 a 2.7



- Oppenheim (2ª edição, Sinais e Sistemas)
  - Cap. 1 todo
  - Cap. 2, seções 2.1 a 2.3