Universidade Federal de Uberlândia
Campus Patos de Minas
Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações

Capítulo 2:

Modelos Matemáticos de Sistemas
- Sinais e Sistemas 1 -

Prof. Alan Petrônio Pinheiro

Objetivos

- Entender o que significa fisicamente e matematicamente a transformada de Laplace
- Encontrar a transformada de Laplace e sua inversa
  - Frações parciais
- Encontrar a função transferência de um sistemas:
  - Elétricos
  - Sistemas mecânicos
- Linearizar sistemas

A transformada de Laplace

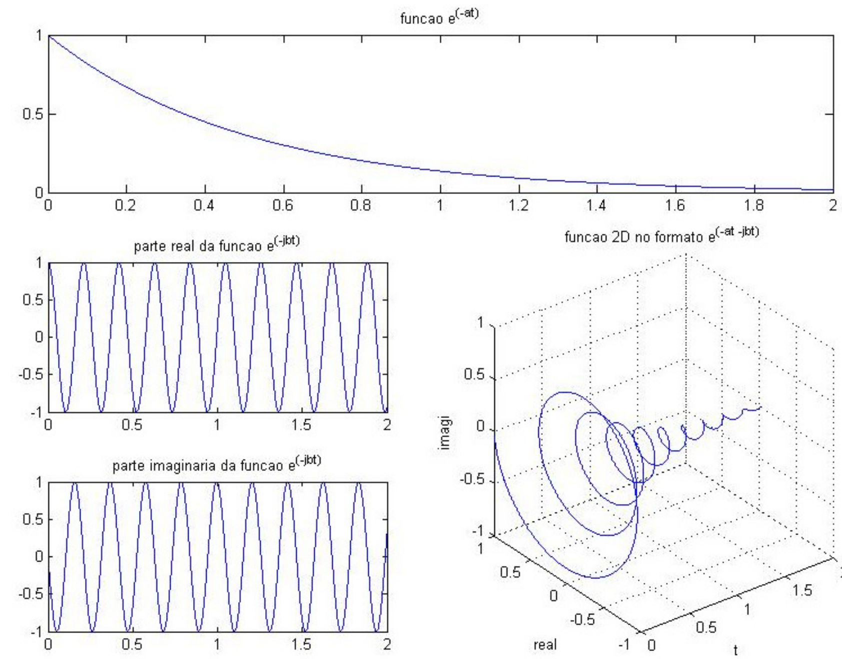
- Definição matemática:
  - Transformada:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

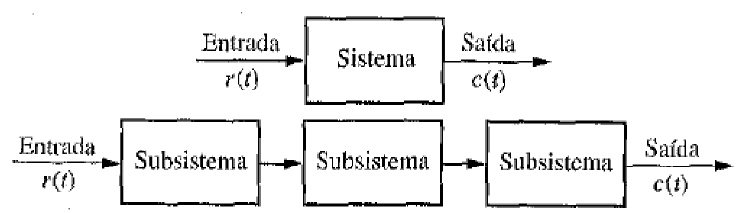
  - Inversa:

$$f(t).u(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-bj}^{a+bj} F(s)e^{st}ds$$

- Vantagens de Laplace
  - Dificuldade de modelar sistema como equação diferencial
  - Decomposição do sistema
  - Avaliação direta de determinadas propriedades do sistema



Código: “**cap2_cod1.m**”



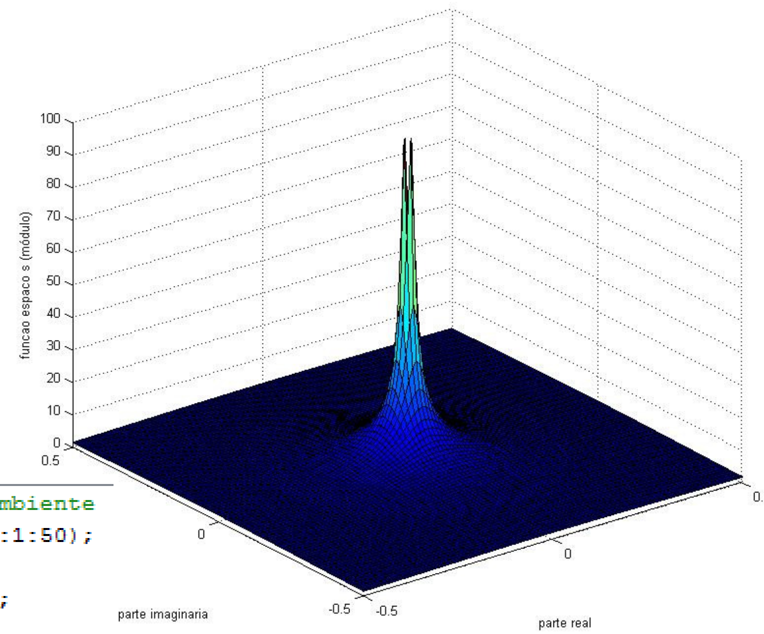

```
clear; clc; close all; %limpa variaveis do ambiente
t=-0:0.0001:2; %intervalo de tempo analizado
%% formato da funcao e^(-st)=e^(-at-jbt)
a = 2;
b = 30;
y1 = exp(-a.*t);
y2 = exp(-j*b.*t);
y = y1.*y2;
subplot(3,2,[1 2]); plot(t,y1); title('funcao e^{(-at)}')
subplot(3,2,[3]);   plot(t,real(y2)); title('parte real da funcao e^{(-jbt)}')
subplot(3,2,[5]);   plot(t,imag(y2)); title('parte imaginaria da funcao e^{(-jbt)}')
subplot(3,2,[4 6]); plot3(t,real(y), imag(y)); grid on; xlabel('t'); ylabel('real'); zlabel('imagi'); title('funcao 2D no formato e^{(-at -jbt)}')
```

Exemplo 1: calcule a transformada de Laplace para o sinal u(t).

Dica: na tabelada de integrais temos: $\int e^{u} du = e^{u}$

- Exemplo 2: usando as tabeladas, ache a transformada inversa de $1/(s+5)^2$

- Mas o que significa 1/s?



Código: “**cap2_cod2.m**”

```
clear; clc; close all; %limpa variaveis do ambiente
[real,imaginaria] = meshgrid(-50:1:50  , -50:1:50);
funcao = 1./(((real+imaginaria*i) -5)^2);
surf(real, imaginaria, abs(funcao)); grid on;
xlabel('parte real');
ylabel('parte imaginaria');
zlabel('funcao espaco s (módulo)');
```

• "Tabeladas":

Tabela transformadas de Laplace

Item nº	f(t)	F(s)
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
6.	$\operatorname{sen} \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7.	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Teoremas de Laplace

Item n.°	Teorema
1.	$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
2.	$\mathscr{L}[kf(t)] = kF(s)$
3.	$\mathscr{L}[f_1(t)+f_2(t)] = F_1(s)+F_2(s)$
4.	$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
5.	$\mathscr{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$
6.	$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
7.	$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$
8.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0-) - \dot{f}(0-)$
9.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$
10.	$\mathscr{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$
11.	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$
12.	$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

Expansão em frações parciais

- Tipos de caso:
  - Caso 1: raízes denominador reais e distintas

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

  - Caso 2: raízes denominador reais e repetidas

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

  - Caso 3: raízes denominador complexas

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{s(s+1+j2)(s+1-j2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+j2} + \frac{K_3}{s+1-j2}$$

- Problema: encontrar os valores de K!
  - Matlab como ferramenta para cálculo
  - Estudar as funções “`poly`”, “`roots`” e “`residue`”

- Observação importante: ordem do denominador é maior que numerador.
  - Se não for este o caso, deve-se: dividir N(s) por D(s) sucessivamente
  - Exemplo divisão:

$$\frac{3s^3 + 2s^2 6s + 7}{s^2 + s + 5}$$

  - Exercício:

$$\frac{6s^4 - 10s^3 + 9s^2 + 9s - 5}{2s^2 - 4s + 5}$$

Caso 1: raízes reais e distintas

- 0º Passo: grau denominador > grau numerador
- 1º Passo: ache as raízes do denominador ('roots') e as separe no formato:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{k_1}{(s-p_1)}+\frac{k_2}{(s-p_2)}+\cdots+\frac{k_n}{(s-p_n)}$$

Exemplo:

$$\frac{32}{s^3+12s^2+32s}=\frac{32}{s(s+4)(s+8)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{(s+4)}+\frac{k_3}{(s+8)}$$

- 2º Passo: Encontre cada um dos termos K_m isolando-o e fazendo:

$$k_m=\left.\frac{\cancel{(s-p_m)}N(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots\cancel{(s-p_m)}\ldots(s-p_n)}\right|_{s\to p_m}$$

Exemplo:

$$k_1=\left.\frac{32}{(s+4)(s+8)}\right|_{s\to 0}$$

- 3º Passo: reescreva a equação completa e aplica Laplace inversa

Exemplo:

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{(s+4)}+\frac{1}{(s+8)}$$

$$y(t)=(1-2e^{-4t}+e^{-8t}).u(t)$$

• Caso 2: raízes reais e iguais

– 0º Passo: grau denominador > grau numerador

– 1º Passo: ache as raízes do denominador ('roots') e as separe no formato:

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s-p_1)^r(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$$=\frac{k_1}{(s-p_1)^r}+\frac{k_2}{(s-p_1)^{r-1}}+\dots+\frac{k_r}{(s-p_1)}+\frac{k_{r+1}}{(s-p_2)}+\dots+\frac{k_n}{(s-p_n)}$$

Exemplo:

$$\frac{2}{(s+1)\,(s+2)^2}=\frac{k_1}{(s+1)}+\frac{k_2}{(s+2)^2}+\frac{k_3}{(s+2)}$$

– 2º Passo: Encontre cada um dos termos K_m isolando-o e fazendo:

$$k_i=\frac{1}{(i-1)!}\cdot\frac{d^{i-1}F_1(s)}{ds^{i-1}}\bigg|_{s\to p_1}\quad para\ i=1,2,\dots r$$

– Dica: use o código em Matlab:

```
clear; clc;
numerador=2;
denominador=poly([-1 -2 -2]);
[r, p, k]=residue(numerador,denominador)
```

- Que equivale a:

$$\frac{2}{(s+1)}+\frac{-2}{(s+2)^2}+\frac{-2}{(s+2)}$$

```
r =

   -2.0000
   -2.0000
    2.0000


p =

   -2.0000
   -2.0000
   -1.0000


k =

     []
```

- Caso 3: raízes complexas
  - Similar ao caso 1
  - Ex.: $\frac{3}{s(s^2+2s+5)}$

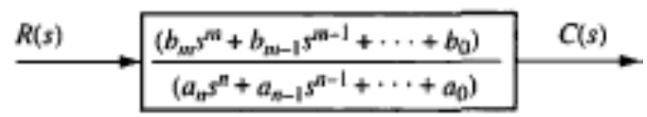
$$\frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

$$F(s) = \frac{3/5}{s} - \frac{3}{5}\frac{(s+1)+(1/2)(2)}{(s+1)^2+2^2}$$

Função de transferência

- Principais usos de Laplace na E.E.
  - Análise em frequência
  - Resolução de EDO
  - Modelagem e avaliação de sistemas
- Relaciona entrada com saída.
  - Exemplo:
    - c(t) = saída e r(t) é entrada



$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 r(t)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0)} \longrightarrow C(s) = R(s)G(s)$$

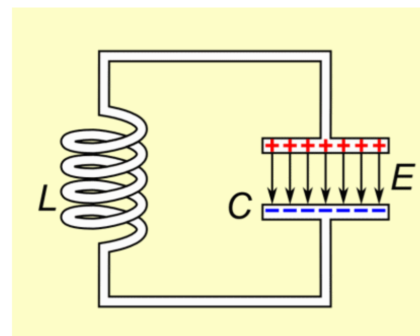
- Exemplo 3: um sistema é representado pela equação abaixo. Encontre:
  - A) a função transferência do sistema
  - B) se inserimos uma entrada r(t)=u(t), qual é a saída?

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = r(t)$$

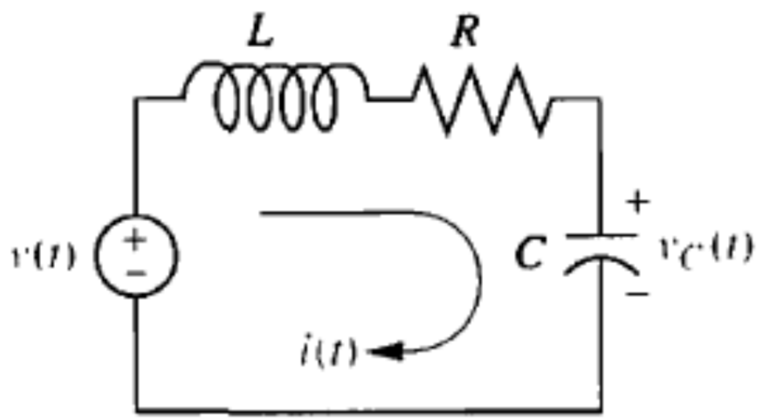
Malhas RLC

Component	Voltage-current	Current-voltage	Voltage-charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$	Admittance $Y(s) = I(s)/V(s)$
Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$	Cs
Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R}v(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R	$\frac{1}{R} = G$
Inductor	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls	$\frac{1}{Ls}$

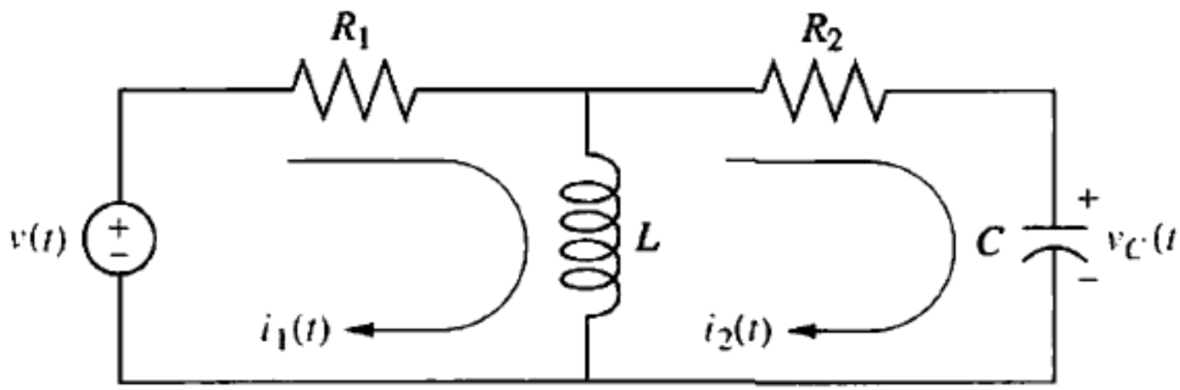
- Capacitor: $V(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$
- Resistor: $V(s) = RI(s)$
- Indutor: $V(s) = LsI(s)$
- Impedância: $\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s)$



- Exemplo 4: encontre a função de transferência do circuito abaixo considerando que sua saída é a tensão do capacitor designada por Vc(t).

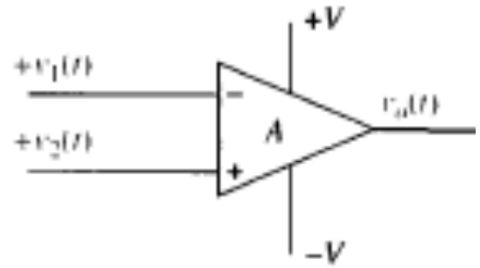


- Exemplo 5: encontre a função de transferência do circuito abaixo considerando que a saída é $I_2(t)$ e a entrada é a fonte de tensão v(t)

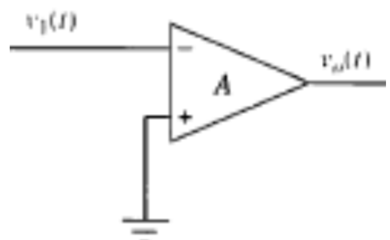


Circuitos com AmpOp

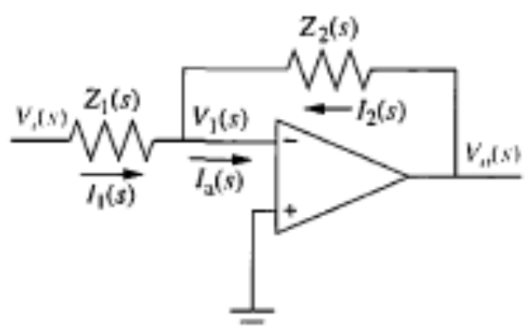
- Circuitos com Amplificador operacional (AO ou AmpOp)
  - Entrada diferencial (v2-v1)
  - Impedância de entrada muito alta
  - Impedância de saída nula
  - Altíssimo ganho



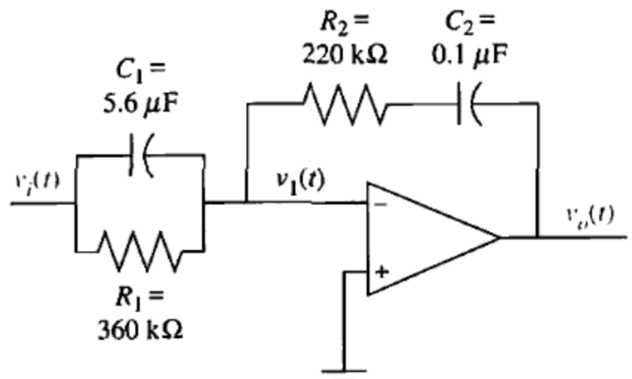
- Amplificador diferencial:



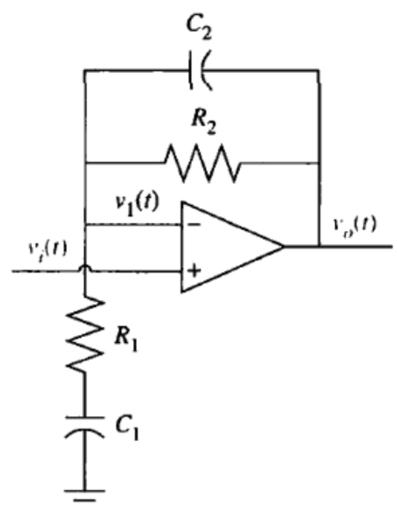
- Realimentação:
  - $\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$



- Exemplo 6: considere que a entrada do circuito abaixo é Vi(s) e a saída é Vo(s). Encontre a função de transferência do circuito

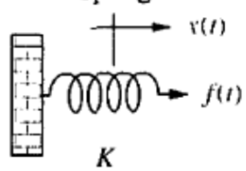
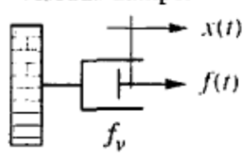
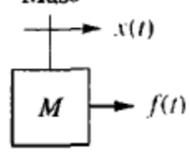


- Exemplo 7: dado o circuito abaixo, determine a relação a função de transferência do circuito (Vo(s)/Vi(s)).



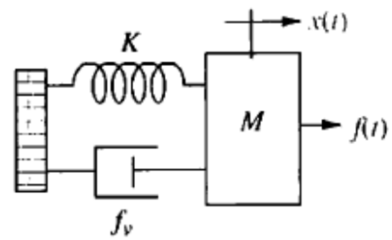
Modelagem de Sistemas Mecânicos

- Sistemas mecânicos clássicos

Component	Force-velocity	Force-displacement	Impedence $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
Spring 	$f(t) = K\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t) = Kx(t)$	K
Viscous damper 	$f(t) = f_v v(t)$	$f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt}$	$f_v s$
Mass 	$f(t) = M\frac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	Ms^2

- Mola e massa armazenam energia
- Amortecedor perde

- Exemplo 8: dado o sistema abaixo, considere sua função transferência considerando como entrada uma força aplicada e saída o deslocamento produzido



- Em outra forma, podemos usar:
  - Para mola:

$$F(s) = K.X(s)$$

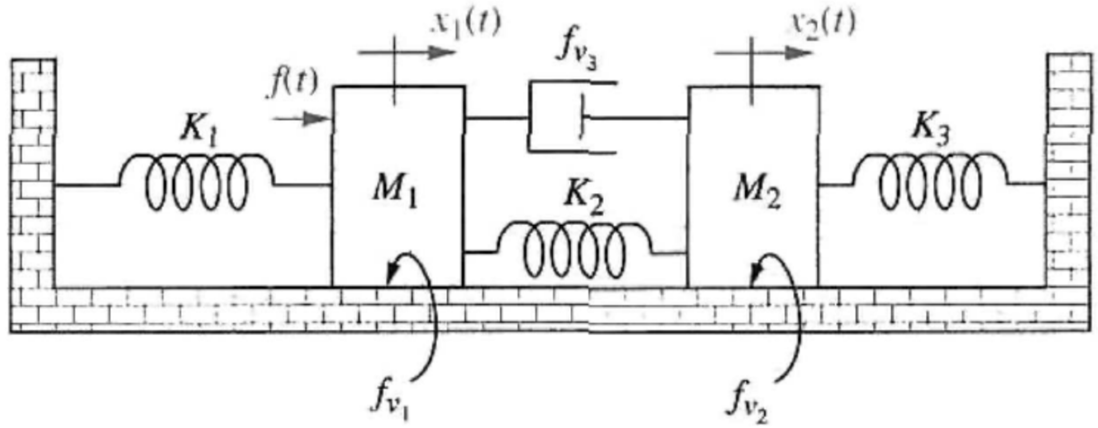
  - Para amortecedor:

$$F(s) = f_v.s.X(s)$$

  - Para massa:

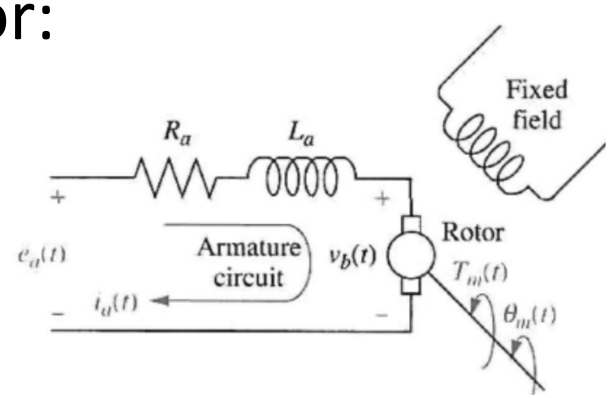
$$F(s) = M.s^2.X(s)$$

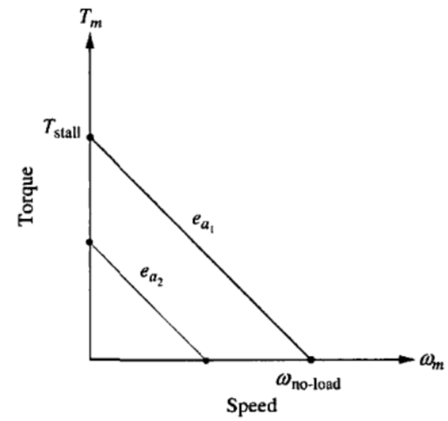
- Exemplo 9: considere o sistema mecânico abaixo. Nele, é aplicado à massa M1 uma força f(t). Como deve ser o deslocamento $x_2(t)$? Para isto, calcule a função transferência $X_2(s)/F(s)$.

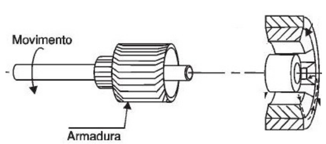


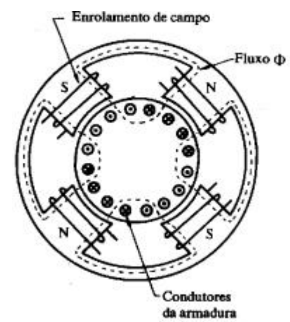
Sistemas eletro-mecânicos

- Motor:

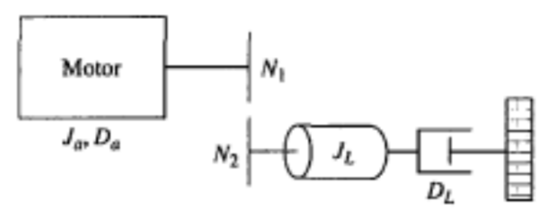








- Equações:



$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t/(R_a J_m)}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]} = \frac{K}{s(s+\alpha)}$$

- Equações auxiliares para modelagem motor:

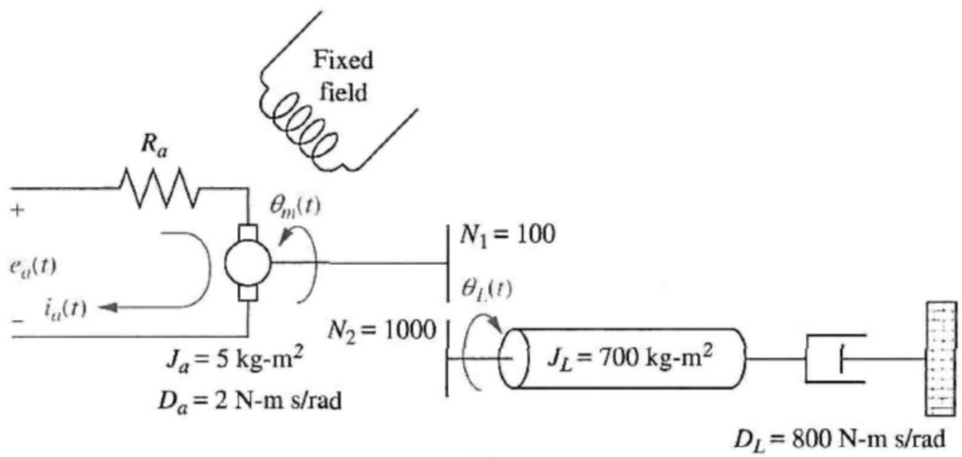
inércia

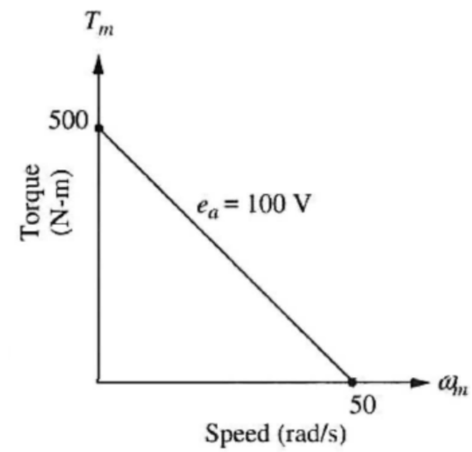
$$J_m = J_a + J_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2;\; D_m = D_a + D_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{\text{stall}}}{e_a}$$

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_{\text{no-load}}}$$

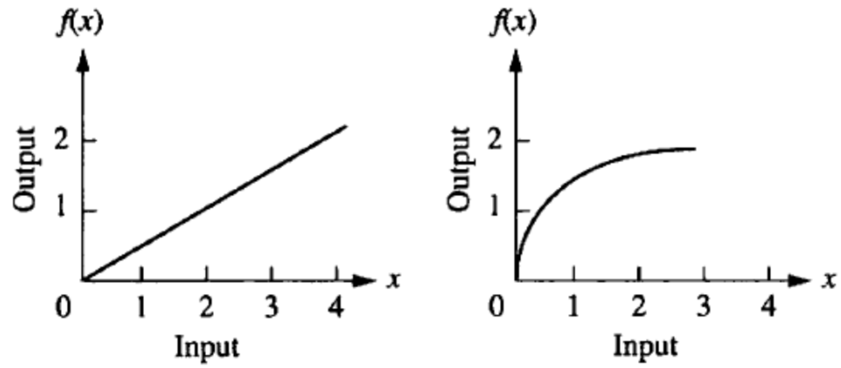
- Exemplo: considerando o sistema abaixo, encontre a função de transferência $\theta_L(s)/E_a(s)$.



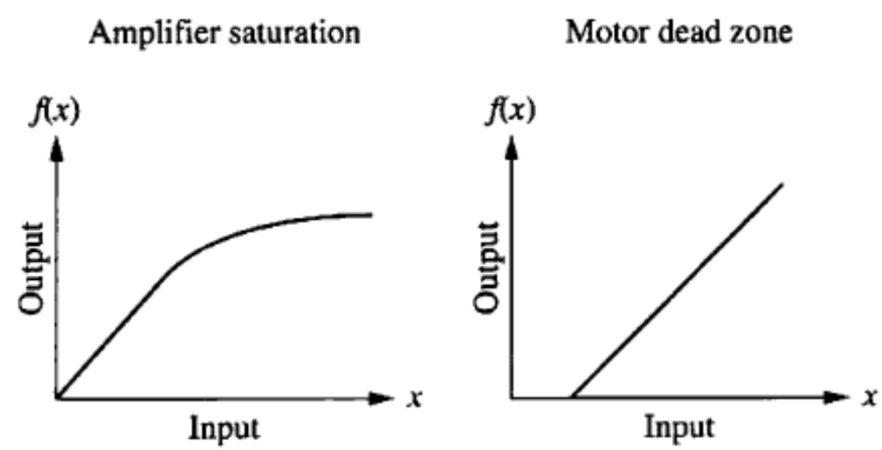


Não-linearidades e linearização

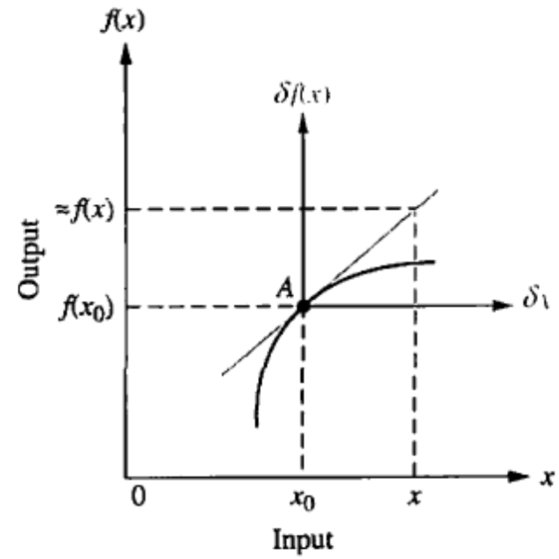
- Não-linearidades:



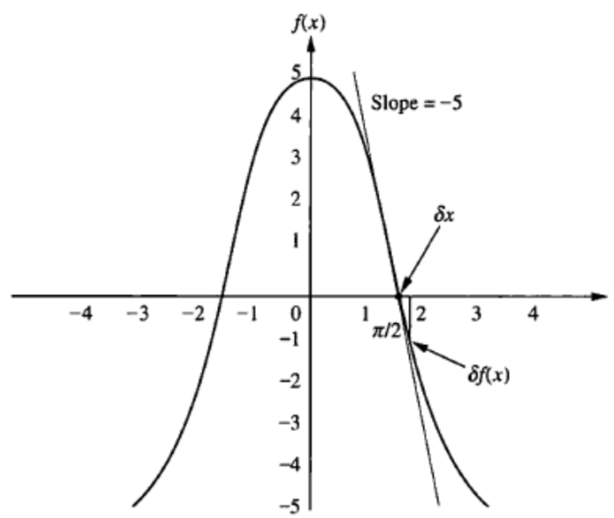
- Exemplos:



- Linearização:



- Exemplo:



- Como linearizar:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$

$$f(x) - f(x_0) \approx \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} (x-x_0)$$

- Exemplo: linearize a função abaixo próximo de x=π/4

$$\frac{d^2\,x}{dt^2} + 2\,\frac{dx}{dt} + \cos(x) = 0$$