

# Processamento Digital de Sinais

Marcelo Basílio Joaquim  
São Carlos - 2010

|   |    |
|---|----|
| Apresentação  | i  |
| Capítulo 1 – Sinais e Sistemas de tempo discreto                                  | 1  |
| 1.1 Introdução  | 1  |
| 1.2 Sinais de Tempo Discreto  | 1  |
| 1.3 Sinais de tempo discreto básicos  | 3  |
| 1.3.1 Sequência amostra unitária  | 3  |
| 1.3.2 Sequência degrau unitário   | 3  |
| 1.3.3 Sequência exponencial   | 3  |
| 1.3.4 Sequência senoidal  | 4  |
| 1.4 Algumas definições sobre sinais de tempo discreto                             | 6  |
| 1.4.1 Energia   | 6  |
| 1.4.2 Potência  | 6  |
| 1.4.3 Sequências simétricas e anti-simétricas                                     | 8  |
| 1.5 Sistemas de tempo discreto  | 8  |
| 1.5.1 Sistemas lineares de tempo discreto   | 9  |
| 1.5.2 Sistemas lineares invariantes ao deslocamento                               | 10 |
| 1.5.3 Sistemas causais  | 10 |
| 1.5.4 Sistemas estáveis   | 11 |
| 1.5.5 Representação em diagrama de blocos dos sistemas de tempo discreto          | 12 |
| 1.5.6 Sistemas lineares discretos e invariantes ao deslocamento                   | 13 |
| 1.5.7 Soma de convolução  | 13 |
| 1.5.7.1 Propriedades da convolução e sistemas LID                                 | 15 |
| 1.5.8 Causalidade e estabilidade em sistemas lineares invariantes ao deslocamento | 15 |
| 1.6 Equação linear de diferenças com coeficientes constantes                      | 17 |
| 1.6.1 Solução da equação de diferenças  | 17 |
| 1.6.2 Resposta ao impulso   | 19 |
| 1.7 Representação de sinais e sistemas discretos no domínio da frequência         | 20 |
| 1.8 Transformada de Fourier para sequências                                       | 22 |
| 1.8.1 Espectro densidade de energia   | 23 |
| 1.8.2 Propriedades da transformada de Fourier para sinais discretos               | 25 |
| Exercícios  | 30 |
| Capítulo 2 – Amostragem de sinais   | 35 |
| 2.1 Sinais de tempo discreto  | 35 |
| 2.2 Amostragem de sinais  | 35 |
| 2.3 Teorema da amostragem   | 36 |
| 2.4 Conversão da taxa de amostragem   | 39 |
| Exercícios  | 44 |
| Capítulo 3 – A transformada z   | 45 |
| 3.1 Introdução  | 45 |
| 3.2. Definição de convergência  | 45 |
| 3.2.1 Região de convergência  | 46 |
| 3.2.2 Propriedades da região de convergência                                      | 50 |
| 3.3 Transformada z inversa  | 51 |
| 3.3.1 Método formal pela integral de contorno                                     | 51 |
| 3.3.2 Método por inspeção   | 53 |
| 3.3.3 Método por expansão em frações parciais                                     | 54 |
| 3.3.4 Método por expansão em série de potências                                   | 57 |
| 3.3.5 Método pela divisão longa   | 58 |
| 3.4 Propriedades da transformada z  | 59 |
| 3.4.1. Linearidade  | 59 |

|   |     |
|---|-----|
| 3.4.2 Deslocamento no tempo   | 59  |
| 3.4.3 Diferenciação de $X(z)$   | 59  |
| 3.4.4 Multiplicação por uma sequência exponencial                             | 60  |
| 3.4.5 Complexo conjugado de uma sequência                                     | 60  |
| 3.4.6 Reversão no tempo   | 60  |
| 3.4.7 Convolução de sequências  | 60  |
| 3.4.8 Teorema do valor inicial  | 60  |
| 3.4.9 Teorema do valor final  | 60  |
| 3.4.10 Teorema da convolução complexa   | 60  |
| 3.4.11 Teorema de Parseval  | 60  |
| 3.5 Aplicação em sistemas lineares  | 61  |
| 3.5.1 Representação de um sistema utilizando a transformada $z$               | 61  |
| 3.5.2 Função do sistema a partir da equação de diferenças                     | 61  |
| 3.5.3 Estabilidade e causalidade  | 63  |
| 3.5.4 Obtenção da resposta em frequência a partir do gráfico de polos e zeros | 65  |
| Exercícios  | 67  |
| <br>  |     |
| Capítulo 4 – Transformada discreta de Fourier                                 | 71  |
| 4.1 Introdução  | 71  |
| 4.2 Transformada de Fourier para tempos discretos                             | 72  |
| 4.3 Transformada Discreta de Fourier  | 73  |
| 4.4 Transformada Discreta de Fourier Inversa                                  | 75  |
| 4.5 Propriedades da TDF   | 75  |
| 4.5.1 Periodicidade   | 76  |
| 4.5.2 Linearidade   | 77  |
| 4.5.3 Deslocamento circular $x(n)$  | 77  |
| 4.5.4 Deslocamento circular em $X(k)$   | 78  |
| 4.5.5 TDF de sequências reais   | 78  |
| 4.5.6 Convolução circular   | 78  |
| 4.5.7 Convolução linear   | 80  |
| 4.6 Uso da DFT em análise espectral   | 81  |
| Exercícios  | 84  |
| <br>  |     |
| Capítulo 5 – Filtros Digitais   | 85  |
| 5.1 Introdução  | 85  |
| 5.2 Projeto de filtros digitais com resposta ao impulso infinita - IIR        | 85  |
| 5.2.1 Método por aproximação das derivadas                                    | 86  |
| 5.2.2 Método por invariância ao impulso                                       | 88  |
| 5.2.3. Método por transformação bilinear                                      | 91  |
| 5.3 Família de filtros analógicos   | 93  |
| 5.3.1 Resposta de Butterworth   | 93  |
| 5.3.1.1 Especificações para o projeto de filtros passa-baixas                 | 95  |
| 5.3.2 Resposta de Chebyshev   | 96  |
| 5.3.3 Filtros Elípticos   | 103 |
| 5.3.4 Filtros de Bessel   | 106 |
| 5.4 Exemplo de projeto de um filtro IIR                                       | 107 |
| 5.4.1 Pelo método por aproximação das derivadas                               | 107 |
| 5.4.2 Método por transformação bilinear                                       | 108 |
| 5.5 Projeto de filtros digitais com resposta ao impulso finita - FIR          | 110 |
| 5.5.1 Definição de um filtro FIR  | 110 |
| 5.5.2 Condição de fase linear   | 110 |
| 5.5.3 Localização dos zeros de um filtro FIR com fase linear                  | 112 |
| 5.6 Projeto de filtros FIR por janelas  | 113 |
| 5.7 Projeto de filtros FIR utilizando janela de Kaiser                        | 117 |
| 5.8 Projeto de filtros FIR por amostragem em frequência                       | 119 |
| Exercícios  | 122 |
| <br>  |     |
| Capítulo 6 – Projetos otimizados de filtros                                   | 125 |

|  |     |
|--|-----|
| 6.1 Projeto de filtros FIR <i>equiripple</i>                 | 125 |
| 6.2 Aproximação de Padé                                      | 131 |
| 6.3 Método de Prony  | 133 |
| 6.4 Projeto de filtros FIR pelo método dos mínimos quadrados | 134 |
| <br>   |     |
| Bibliografia   | 139 |
| <br>   |     |
| Apêndices  |     |
| A1 – Janelas   | 141 |
| A2 – FFT   | 145 |
| A3 – Fórmulas e tabelas                                      | 153 |

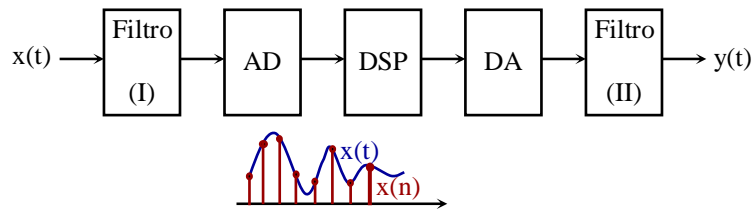
## Apresentação

Processamento digital de sinais (PDS) é o tratamento que se aplica a um sinal de tempo discreto. Este processamento é executado por meios digitais: computadores ou processadores digitais.

Com o advento dos computadores no início da década de 60, e com o desenvolvimento de algoritmos como o da transformada rápida de Fourier - FFT (Coley and Tukey – 1965), tem início a uma nova etapa no campo de tratamento de sinais e suas aplicações. O desenvolvimento dos microprocessadores (década de 1970) e dos processadores digitais (década de 1980): ampliaram as aplicações de PDS. Por volta de 1975 tem-se a publicação dos primeiros livros importantes no assunto:

- Openheim, A. V. and Schafer, R. W., Digital Signal Processing.
- Rabiner & Gold, Theory and Applications of Digital Signal Processing.

A maior parte dos sinais encontrados são contínuos no tempo, por exemplo, áudio, vídeo, temperatura. Assim, para o tratamento digital, tem-se necessidade de converter as informações em sinais elétricos de tempo contínuos por meio de transdutores e em seguida digitalizar estes sinais, isto é: converter do tempo contínuo para o tempo discreto (digital) utilizando conversores AD. Os principais componentes de um sistema DSP típico são mostrados na figura 1.



- Filtro I: Filtro *anti-aliasing*
- AD: Conversor analógico digital
- DSP: Computador digital ou processador digital de sinais
- DA: Conversor digital analógico
- Filtro II: Filtro *anti-imaging* (filtro de reconstrução)

**Figura 1:** Componentes de um sistema para processamento digital de sinais.

### Algumas vantagens DSP:

- **Programabilidade:** Uma implementação em PDS é mais flexível, desde de que é mais fácil de se modificar (o software pode ser atualizado, refeito ou modificado).
- **Estabilidade e Repetibilidade:** Apresenta melhor qualidade do sinal, estabilidade e repetibilidade no desempenho do sistema, pois o sistema é representado na forma digital e a implementação é através de algoritmos que não dependem de tolerância de componentes, envelhecimento, etc.
- **Aplicações especiais:** Alguns processamentos são realizados com mais eficiência na forma digital: compressão, filtros com fase linear.

### Algumas desvantagens de DSP:

- Não é econômico em aplicações simples: os conversores AD e DA, em geral encarecem o sistema.
- Limitação em frequência, consumo alto de potência.

### Algumas aplicações de DSP

- Gravação digital de áudio.

- Compressão de sinais de voz e de áudio para aplicações em telefonia digital, armazenamento em CD.
- Implementação de modem.
- Enriquecimento de imagem e compressão.
- Síntese da fala e reconhecimento.
- Predição de sinais ou saídas de sistemas.
- Controle.
- Bioengenharia.
- Geofísica

Este texto tem como objetivo apresentar aos alunos iniciantes uma abordagem dos tópicos básicos da matéria processamento digital de sinais. Alunos de Engenharia Elétrica têm a necessidade de entrar no mercado de trabalho com algum conhecimento básico de PDS. A intenção é apresentar um texto introdutório para ser utilizado em cursos de graduação nas áreas de Engenharia Elétrica, Engenharia de Computação e áreas afins, onde existe a necessidade de se trabalhar com sinais e sistemas de tempo discreto.

No capítulo 1 são introduzidos os conceitos de sinais e sistemas de tempo discreto e como trabalhar com estes nos domínios do tempo e frequência. São apresentados também os sistemas lineares de tempo discretos e suas ferramentas matemáticas de análise. No capítulo 2 são introduzidos o conceito de amostragem periódica de sinais, o teorema da amostragem e seus efeitos. Os capítulos 3 e 4 são reservados, respectivamente, para a apresentação da transformada  $z$  e da transformada discreta de Fourier (TDF) com exemplo de aplicação em análise espectral. A transformada rápida de Fourier, através do algoritmo de decimação no tempo, é apresentada no apêndice A-2, para os interessados em conhecer tal algoritmo. E os capítulos 5 e 6 são utilizados para o estudo de projetos de filtros digitais. No capítulo 5 são estudados os projetos clássicos de filtros seletivos em frequência utilizando os filtros com resposta ao impulso infinita (IIR) e os projetos de filtros com resposta ao impulso finita (FIR): projeto por janelas e por amostragem em frequência. No capítulo 6 são apresentados alguns projetos otimizados de filtros, incluindo o algoritmo de Parks-McClellan para filtros FIR e os métodos de aproximação de Padé, de Prony e método dos mínimos quadrados para filtros IIR. Para auxiliar o estudo outros dois apêndices são incluídos: um para janelas (A-1) e um com formulas e tabelas utilizadas em PDS (A-3).

Marcelo Basilio Joaquim

## Capítulo 1

### SINAIS E SISTEMAS DE TEMPO DISCRETO

#### 1.1 Introdução

Um sinal pode ser definido como uma quantidade física, variante no tempo e que transporta informação a respeito do comportamento de um sistema. Em geral, ele é representado matematicamente como uma função de uma ou mais variáveis independentes (tempo, espaço, etc.), porém, neste estudo, eles serão admitidas funções com somente uma variável independente, o tempo.

O modo mais comum de se classificar um sinal é dividi-lo em duas importantes classes. Os determinísticos e os aleatórios. Os sinais determinísticos são aqueles utilizados para propósitos de testes, modelagem e caracterização de sistemas. Dentre eles pode-se destacar: os sinais senoidais, a onda quadrada, a função degrau unitário, a função impulso, etc. Eles são bem definidos e em geral representados ou descritos por uma função matemática ou gráfica, onde se conhece o seu valor em qualquer instante de tempo, presente, passado ou futuro. Amplitude, frequência e fase são os seus principais parâmetros. Na segunda categoria recaem os sinais de informação propriamente ditos e aqueles provenientes da natureza, tais como: sinais de voz, áudio, vídeo, temperatura, dados digitais e também o ruído. Devido à natureza aleatória, eles só podem ser descritos utilizando como fundamento a teoria de probabilidades e algumas propriedades que apresentam, como por exemplo, estacionariedade e através de algumas médias tais como: valor médio, valor quadrático médio, variância e desvio padrão, função de autocorrelação e espectro densidade de potência.

A variável independente também é uma outra quantidade muito importante para classificar os sinais. Os **sinais de tempo contínuo** são classificados por uma variável independente que pode assumir qualquer valor dentro de uma faixa contínua e que pode se estender até o infinito; estes sinais são chamados mais raramente de analógicos. Já os **sinais de tempo discreto** são definidos em instantes de tempos discretos,  $t_n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . A variável independente assume valores discretos, provavelmente não enumerável, e portanto eles são representados por uma sequência de números.

A amplitude do sinal também pode ser discreta ou contínua. No caso discreto ela é quantizada, isto é aproximada para um valor pertencente a um conjunto finito de amplitudes e em seguida codificada digitalmente. Neste caso têm-se os **sinais digitais**, onde tanto a amplitude quanto o tempo são quantidades discretas. Neste estudo, na maioria das vezes não se fará nenhuma referência com relação à amplitude, de forma tal que os sinais serão admitidos de tempo discreto, mas cuja amplitude pode assumir qualquer valor dentro de uma faixa contínua pertencente aos números reais.

Um **sistema** pode ser definido como um dispositivo que realiza uma operação matemática em um sinal. Como um exemplo de sistema pode se citar um filtro utilizado para reduzir ruído ou interferências em um sinal aplicado em sua entrada. Os sistemas podem ser classificados do mesmo modo que os sinais. **Sistemas contínuos** ou analógicos são aqueles em que as entradas e saídas são sinais de tempo contínuo. Os **discretos** são aqueles cujas entradas e saídas são sinais de tempo discreto e os **digitais** são aqueles cujas entradas e saídas são sinais digitais. Quando se passa um sinal através de um sistema dizemos que ele foi processado, daí o nome processamento de sinais.

Neste capítulo serão estudados os principais conceitos e propriedades para sinais e sistemas de tempo discreto.

#### 1.2 Sinais de tempo discreto

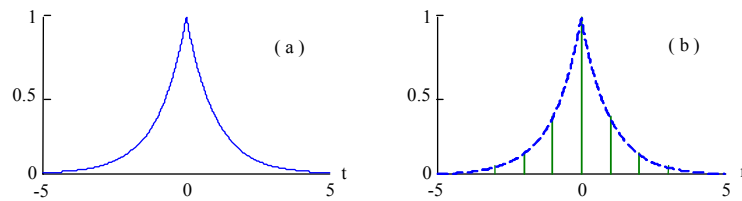
Os sinais de tempo discreto são em geral, originados através da amostragem do sinal contínuo, cujo intervalo de amostragem é constante e especificado pelo teorema de Nyquist, que será estudado no

capítulo 2. Como um exemplo de um sinal contínuo e um de tempo discreto, considere o seguinte sinal exponencial,

$$x(t) = e^{-|t|} \quad (1.1)$$

Este sinal é definido para qualquer instante de tempo no intervalo  $-\infty < t < \infty$ , como mostra a figura 1.1.a., sendo portanto um sinal de tempo contínuo. Admitindo agora, que este sinal é definido somente nos instantes  $t_n$ :  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , como mostra a figura 1.1.b, então este novo sinal passa a ser de tempo discreto. Neste caso tem-se que,

$$x(t_n) = e^{-|t_n|} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$



**Figura 1.1:** Representação gráfica do sinal das equações (1.1) e (1.2).

Na figura 1.1.b o sinal discreto é representado por retas (raias) paralelas ao eixo de tempo discreto. Observe que nada se especifica a respeito do sinal amostrado entre dois intervalos adjacentes  $t_n$  e  $t_{n+1}$  pois a variável é definida somente para valores discretos. Isto não implica que ele não apresente valores nestes intervalos, mas somente que não é definido. Os instantes de tempo são regularmente espaçados tais que  $t_n = nT_a$  ( $T_a$  é chamado de **intervalo ou período de amostragem**). A notação comumente utilizada para este tipo de sinal é  $x(n) = x(nT_a)$  e o sinal passa a ser representado por uma sequência de números  $\{x(n)\}$ . Admitindo, por exemplo, na equação (1.2)  $T_a = 0,1$  s, tem-se a seguinte sequência,

$$x(n) = e^{-0.1|n|} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3)$$

Como foi comentado acima, um sinal de tempo discreto é associado a uma sequência de números  $\{x(n)\}$  como aquelas convencionalmente utilizadas em matemática. Assim é interessante especificar as operações básicas que se realizam com sequências.

**(a) Soma de sequências**

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

Soma-se amostra com amostra das sequências individuais. Observe que estas sequências devem apresentar o mesmo tamanho. No caso de sequências com tamanhos diferentes o problema pode ser resolvido acrescentando-se zeros à sequência de menor tamanho.

**(b) Produto de sequências**

$$y(n) = x_1(n).x_2(n)$$

Multiplica-se amostra por amostra das sequências individuais. Observe que, como anteriormente, estas sequências devem apresentar o mesmo tamanho.

**(c) Multiplicação por um escalar  $\alpha$**

$$y(n) = \alpha x(n)$$



Multiplica-se cada elemento da sequência por  $\alpha$ .

**(d) Atraso em uma sequência**

$$y(n) = x(n - n_d)$$

Em que,  $n_d$  é um número inteiro positivo qualquer. Observe que no instante  $n = 0$ ,  $y(0) = x(-n_d)$ , assim,  $y(n)$  está atrasada por  $n_d$  amostras em relação à  $x(n)$ . Se  $n_d$  for um número negativo então se diz que  $y(n)$  está avançada por  $n_d$  amostras em relação a  $x(n)$ .

**1.3 Sinais de tempo discreto básicos**

Existem alguns sinais discretos que são muito utilizados no desenvolvimento da teoria de processamento digital de sinais e no estudo, modelagem e teste de sistemas. Alguns destes sinais são definidos a seguir.

**1.3.1 Sequência amostra unitária**

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Este tipo de sinal ou sequência desempenha o mesmo papel que a função impulso unitário  $\delta(t)$  desempenha nos sistemas contínuos no tempo. Ele também é chamado, sem distinção com os sistemas contínuos, de função impulso, impulso unitário ou pulso unitário.

Qualquer sequência  $x(n)$  pode ser representada por uma sequência ponderada de funções amostras unitárias tais que:

$$\begin{aligned} x(n) &= \dots a_{-2}\delta(n+2) + a_{-1}\delta(n+1) + a_0\delta(n) + a_1\delta(n-1) \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(n-k) \end{aligned} \quad (1.5)$$

em que:  $a_k = x(k)$ .

**1.3.2 Sequência degrau unitário**

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Esta sequência é muito útil quando se pretende distinguir índices positivos (tempo positivo) dos negativos. Identificamos assim, os sinais causais, isto é, sinais que são nulos para  $n < 0$ , ou seja, que apresentam valores somente para índices positivos. Para esta sequência as seguintes relações são válidas:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \quad (1.7)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.8)$$

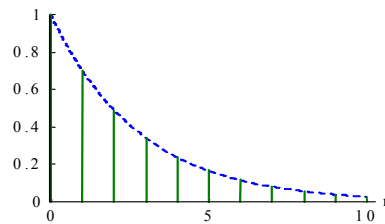
**1.3.3 Sequência exponencial**

$$x(n) = \alpha^n \tag{1.9}$$

Esta sequência é muito utilizada em processamento digital de sinais. Ela aparece com frequência no estudo de sistemas lineares de tempo discreto. Um sistema linear de primeira ordem apresenta como resposta ao impulso uma função exponencial, como será visto mais adiante. Uma sequência exponencial causal é representada como abaixo,

$$x(n) = \alpha^n u(n) \tag{1.10}$$

assim, ela apresenta todos os seus valores nulos para  $n < 0$ . No caso de  $\alpha < 1$  ela toma a forma de uma exponencial amortecida com mostra a figura 1.2.



**Figura 1.2:** Sinal exponencial.

### 1.3.4 Sequência senoidal

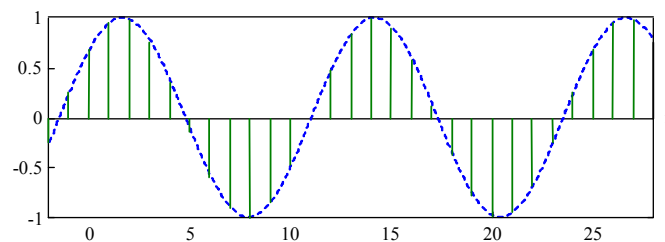
Um sinal senoidal de tempo discreto é uma oscilação harmônica que pode ser expressa por uma das formas mostradas abaixo,

$$x(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \phi) = A \cos(w_0 n + \phi) \tag{1.11}$$

$$x(n) = A \sin(2\pi f_0 n + \phi) = A \sin(w_0 n + \phi) \tag{1.12}$$

$$x(n) = A e^{j(2\pi f_0 n + \phi)} = A e^{j(w_0 n + \phi)} \tag{1.13}$$

A equação (1.13) representa a forma complexa da senóide e as outras duas anteriores representam as formas reais. Este sinal possui três parâmetros que o caracterizam completamente: a amplitude **A**, a frequência  $w_0$  e o ângulo de fase  $\phi$ .



**Figura 1.3:** Sinal senoidal de tempo discreto.

É necessário fazer uma observação importante com relação à frequência dos sinais contínuos e dos discretos. As letras maiúsculas **Ω** e **F** serão utilizadas para representar as frequências analógicas e as minúsculas **w** e **f** serão utilizadas para representar as frequências digitais. Neste caso **w** tem a unidade de radianos por amostra e **f** a unidade de ciclos por amostra e estão relacionadas por:

$$w = 2\pi f \tag{1.14}$$

As frequências analógicas e digitais estão relacionadas pelo período ou pela frequência de amostragem do sinal como segue,

$$f = FT_a = \frac{F}{F_a} \quad (1.15)$$

em que,  $T_a$  é o período de amostragem do sinal. Observe que quando for necessário determinar a frequência de um sinal analógico que gerou o amostrado basta multiplicar a frequência digital pela de amostragem.

Para mostrar este resultado, considere o seguinte sinal senoidal de tempo contínuo,

$$x(t) = A \cos(2\pi Ft + \phi)$$

Admitindo que se colhe uma amostra deste sinal a cada  $T_a$  segundos então o sinal amostrado será dado por:

$$x(nT_a) = A \cos(2\pi FnT_a + \phi)$$

Considerando  $f = FT_a$ , como indicado pela equação (1.15), tem-se que:

$$x(n) = A \cos(2\pi fn + \phi)$$

### Propriedades de um sinal senoidal de tempo discreto

- a) Sinais senoidais cujas frequências são separadas por múltiplos inteiros de  $2\pi$  são idênticos.

$$\cos[(w_0 + 2\pi M)n + \phi] = \cos[w_0 n + 2\pi Mn + \phi] = \cos[w_0 n + \phi]$$

- b) A taxa mais alta de oscilação para sinais de tempo discreto é obtida quando  $w = \pi$  ou  $f = 0.5$ .

Para provar esta propriedade, considere uma sequência  $x(n)$  tal que:

$$x(n) = A \cos(w_0 n), \quad \text{em que : } 0 < w_0 < \pi$$

Seja uma outra sequência  $x_1(n)$ , com frequência maior que  $\pi$ , tal que:

$$x_1(n) = A \cos[(w_0 + \pi)n]$$

Assim, a princípio, a frequência de  $x_1(n)$  seria  $w_0 + \pi$ , mas esta afirmação não é verdadeira pois:

$$x_1(n) = A \cos[(w_0 + \pi)n] = A \cos[(w_0 + 2\pi - \pi)n]$$

Pela propriedade anterior, propriedade (a) e ainda lembrando que a função cosseno é par tem-se que:

$$x_1(n) = A \cos[(w_0 - \pi)n] = A \cos[(\pi - w_0)n]$$

Assim, a frequência deste sinal será  $\pi - w_0$ , logo ela pertence ao intervalo  $(0, \pi)$ . Portanto a frequência de oscilação mais alta é obtida quando  $w = \pi$ .

- c) Um sinal senoidal discreto é periódico se e somente se a frequência for um número racional.

**Definição:** “Se uma sequência  $x(n)$  é periódica, com período  $N$ , então  $x(n)$  será igual a  $x(n+N)$ , em que  $N$  é o menor inteiro que satisfaz a relação  $x(n) = x(n+N)$ ”.

Seja:

$$x(n) = A \cos(2\pi f_0 n)$$

Se  $x(n)$  é periódica então:

$$x(n) = A \cos(2\pi f_0 n) = A \cos[2\pi f_0 (n + N)] = A \cos(2\pi f_0 n + 2\pi f_0 N)$$

Observe que pela propriedade (a) a relação acima é verdadeira se existir um número  $M$ , inteiro tal que:

$$2\pi f_0 N = 2\pi M \Rightarrow f_0 = \frac{M}{N}$$

Portanto  $f_0$  deve ser um número racional para a sequência ser periódica.

d) Um sinal senoidal pode ser obtido pelas relações de Euler:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (1.16.a)$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (1.16.b)$$

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \text{sen}(\theta) \quad (1.17)$$

## 1.4 Algumas definições sobre sinais de tempo discreto

### 1.4.1 Energia

A energia de um sinal de tempo discreto é definida pela seguinte equação:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.18)$$

Se o sinal  $x(n)$  apresentar energia finita ele é chamado de sinal de energia. Os sinais de duração finita, isto é, aqueles que apresentam somente  $N$  amostras não nulas, têm sempre energia finita. Os sinais de duração infinita e que apresentam energia finita são caracterizados por valores de amostras que tendem a zero conforme  $n$  tende a infinito.

$$E < \infty \Rightarrow |x(n)| \rightarrow 0, \text{ conforme } n \rightarrow \infty \quad (1.19)$$

### 1.4.2 Potência

Em geral, os sinais periódicos e os processos aleatórios apresentam energia infinita. Para estes casos é apropriada a definição de potência média que é dada pela seguinte equação:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.20)$$

Se o sinal é periódico, com período fundamental N, então a potência média é definida por:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \quad (1.21)$$

**Exemplo 1:** Determine a energia do seguinte sinal:  $x(n) = Ae^{-\alpha n}u(n)$ ,  $\alpha < 1$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} |Ae^{-\alpha n}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A^2 e^{-2\alpha n} = A^2 \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-2\alpha})^n = \frac{A^2}{1-e^{-2\alpha}}$$

**Exemplo 2:** Determine a potência da sequência degrau unitário u(n).

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N |u(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1+1/N}{2+1/N} = \frac{1}{2}$$

**Exemplo 3:** Determine a potência de um sinal complexo, composto pela soma de duas componentes senoidais, com frequências  $w_1$  e  $w_2$  diferentes, tais que:

$$x(n) = A_1 e^{jw_1 n} + A_2 e^{jw_2 n}$$

em que,  $A_1$  e  $A_2$  são constantes reais e positivas.

- Cálculo de  $|x(n)|$

$$\begin{aligned} |x(n)| &= x(n)x^*(n) = (A_1 e^{jw_1 n} + A_2 e^{jw_2 n})(A_1 e^{-jw_1 n} + A_2 e^{-jw_2 n}) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{j(w_1-w_2)n} + e^{-j(w_1-w_2)n}) \end{aligned}$$

- Cálculo da Potência

$$\begin{aligned} P &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{j(w_1-w_2)n} + e^{-j(w_1-w_2)n})] \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j(w_1-w_2)n} + e^{-j(w_1-w_2)n}) \end{aligned}$$

$$\text{Examinando o limite: } L = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j(w_1-w_2)n}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{1-e^{j(w_1-w_2)N}}{1-e^{j(w_1-w_2)}} = 0$$

Portanto:

$$P = A_1^2 + A_2^2$$

Pode-se mostrar também que para M senóides complexas distintas a potência média será:

$$P = \sum_{k=0}^M A_k^2 \tag{1.22}$$

Neste exemplo foram considerados sinais senoidais complexos. Para a situação em que se tem M sinais senoidais reais com frequências distintas, a potência média será dada por:

|   |  |
|---|--|
| $P = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^M A_k^2 \tag{1.23}$ |  |
|---|--|

### 1.4.3. Sequências simétricas e anti-simétricas

Seja  $x(n)$  uma sequência complexa e  $x^*(n)$  o seu conjugado.

Uma sequência é chamada de simétrica (par) se:  $x(n) = x^*(-n)$

Uma sequência é denominada anti-simétrica (ímpar) se:  $x(n) = -x^*(-n)$

É possível também obter uma sequência simétrica  $x_e(n)$  ou uma anti-simétrica  $x_o(n)$  a partir de uma sequência qualquer  $x(n)$  através das seguintes expressões:

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)] \tag{1.24}$$

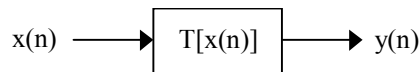
$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)] \tag{1.25}$$

### 1.5 Sistemas de tempo discreto

Os sistemas de tempo discreto são definidos do mesmo modo que os sistemas contínuos. Eles são definidos matematicamente como uma transformação que se opera em uma sequência de entrada  $x(n)$  produzindo uma sequência de saída  $y(n)$  chamada de resposta do sistema à excitação  $x(n)$ . Esta transformação é representada pela seguinte relação:

$$y(n) = T[x(n)] \tag{1.26}$$

em que o operador  $T[.]$  representa a transformação e a sua representação gráfica é feita pelo diagrama de blocos mostrado na figura abaixo.



**Figura 1.4:** Representação de um sistema de tempo discreto.

**Exemplo 4:** Segue a seguir alguns exemplos de sistemas de tempo discreto que são muito utilizados em processamento digital de sinais:

**a) Sistema de atraso**

$$y(n) = x(n - n_d) \tag{1.27}$$

Admitindo  $n_d$  um número inteiro positivo, este sistema atrasa (**desloca**) o sinal de entrada por  $n_d$  amostras. No caso de  $n_d$  ser negativo ele avança pela mesma quantidade de amostras.

### b) Acumulador

O sistema acumulador calcula a soma de todos os valores passados da entrada até o instante presente (atual). Ele é definido pela seguinte equação:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad (1.28)$$

Isolando o termo de ordem  $n$  da expressão acima se tem que:

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k)$$

Observe que o segundo termo da equação acima representa a saída atrasada de 1 amostra. Assim:

$$y(n) = x(n) + y(n-1) \quad (1.29)$$

A equação (1.29) justifica o termo acumulador, pois a saída depende do valor presente da entrada e do valor anterior  $y(n-1)$  da saída. Além disso, a sua resposta não é unicamente determinada pela entrada, mas depende das condições iniciais do sistema, isto é, do estado do sistema antes de se aplicar a excitação. Considerando, por exemplo, que no sistema que é aplicado a função  $nu(n)$ , pode-se observar que a saída depende de  $y(-1)$ .

- admitindo  $y(-1) = 0$  tem-se:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n ku(k) = \sum_{k=0}^n k + y(-1) = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

- admitindo  $y(-1) = 1$  tem-se:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n ku(k) = \sum_{k=0}^n k + y(-1) = \sum_{k=0}^n k + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

Observe que os resultados anteriores mostram que a saída depende de  $y(-1)$ . Frequentemente, quando as condições iniciais são nulas, isto é,  $y(-1) = y(-2) = \dots = 0$ , o sistema é dito estar em repouso (ou relaxado).

### c) Sistema sem memória

Um sistema sem memória é aquele cuja saída depende somente da entrada no instante  $n$ . Por exemplo, o sistema definido pela equação (1.30) não tem memória.

$$y(n) = [x(n)]^2 \quad (1.30)$$

## 1.5.1 Sistemas lineares de tempo discreto

Um sistema linear de tempo discreto (que será abreviado pela sigla **LTD**) é aquele que obedece ao princípio da superposição, isto é: Admitindo  $y_1(n)$ ,  $y_2(n)$ , ...,  $y_M(n)$  as respostas do sistema correspondentes, respectivamente, às excitações  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ , ...,  $x_m(n)$ , então o sistema é linear se e somente se :

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \dots + a_Mx_M(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)] + \dots + a_MT[x_M(n)]$$

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \dots + a_Mx_M(n)] = a_1y_1(n) + a_2y_2(n) + \dots + a_My_M(n) \quad (1.31)$$

em que, M é um número inteiro qualquer e  $a_1, a_2, \dots, a_M$  são constantes.

**Exemplo 5:** Exemplos de dois sistemas lineares:

a) O sistema  $y(n) = nx(n)$  é linear pois:

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = na_1x_1(n) + na_2x_2(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$$

b) O acumulador definido pela equação (1.28) é um sistema linear pois:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n [a_1x_1(k) + a_2x_2(k)] = a_1 \sum_{k=-\infty}^n x_1(k) + a_2 \sum_{k=-\infty}^n x_2(k) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$$

### 1.5.2 Sistemas lineares invariantes ao deslocamento

Um sistema LTD invariante ao deslocamento é aquele cuja característica não varia com o deslocamento provocado na entrada. Assim, um sistema LTD é invariante ao deslocamento se e somente se:

$$T[x(n - n_d)] = y(n - n_d). \quad (1.32)$$

**Exemplo 6:** Exemplos de sistemas invariantes e variantes ao deslocamento:

Seja  $y(n, n_d)$  a saída do sistema quando se aplicado em sua entrada uma sequência  $x(n - n_d)$ .

a) O diferenciador,  $y(n) = x(n) - x(n-1)$  é invariante ao deslocamento pois:

$$y(n, n_d) = x(n - n_d) - x(n - n_d - 1) = y(n - n_d)$$

b) O sistema  $y(n) = nx(n)$  é variante ao deslocamento pois quando é aplicado  $x(n-n_d)$  tem-se:

$$y(n, n_d) = nx(n - n_d) \neq y(n - n_d) = (n - n_d)x(n - n_d)$$

c) O sistema  $y(n) = x(-n)$  é variante ao deslocamento pois:

Seja:  $x_1(n) = x(n - n_d)$ , então:

$$y(n) = x_1(-n) = x(-n - n_d) \neq y(n - n_d)$$

d) O compressor  $y(n) = x(Mn)$  é variante ao deslocamento a não ser que  $M=1$ .

Seja:  $x_1(n) = x(n - n_d)$ , então:

$$y(n) = x_1(Mn) = x(Mn - n_d) \neq y(n - n_d)$$

### 1.5.3 Sistemas causais



Um sistema é chamado causal se o sinal presente na sua saída  $y(n)$ , em qualquer instante  $n$ , depende somente dos valores nos instantes passados da saída e nos instantes presente e passados da entrada  $\{x(n), x(n-1), x(n-2), \dots\}$ , e não depende dos valores futuros  $\{x(n+1), x(n+2), \dots, y(n+1), \dots\}$ .

Uma outra definição muito usual para os sistemas causais é a que segue:

“Um sistema é chamado causal se para qualquer instante  $n_0$  a sua saída no instante  $n = n_0$  depende dos valores da entrada para  $n \leq n_0$ ”.

**Exemplo 7:** Exemplos de sistemas causais:

$$1) \quad y(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$2) \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

$$3) \quad y(n) = ax(n) + by(n-1)$$

**Exemplo 8:** Exemplos de sistemas não causais:

$$1) \quad y(n) = x(n) + 3x(n+4)$$

$$2) \quad y(n) = x(n^2)$$

$$3) \quad y(n) = x(2n)$$

$$4) \quad y(n) = x(-n)$$

### 1.5.4 Sistemas estáveis

Um sistema em repouso, é estável se e somente se para uma sequência de entrada limitada tem-se uma saída limitada, isto é:

$$|x(n)| \leq B_x < \infty \Rightarrow |y(n)| \leq B_y < \infty, \quad (1.33)$$

em que  $B_x$  e  $B_y$  são constantes finitas.

**Exemplo 9:** Exemplos de sistemas estáveis

$$1) \quad y(n) = x(n - n_d)$$

$$2) \quad y(n) = [x(n)]^2$$

$$3) \quad y(n) = x(Mn)$$

**Exemplo 10:** O acumulador é um sistema instável.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

Seja  $x(n) = u(n)$  que é limitada, pois o valor máximo da função degrau unitário é 1. Então:

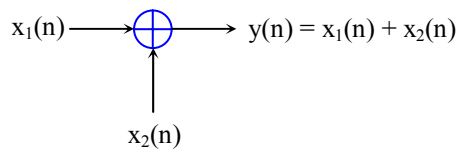
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n u(k) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n + 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

Observe que embora  $n$  seja finito, não existe um valor fixo para  $B_y$ , como na definição em (1.33), tal que:  $(n + 1) \leq B_y < \infty$ .

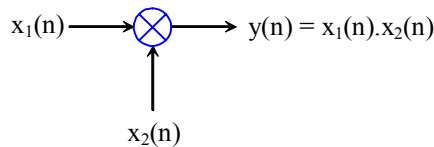
### 1.5.5 Representação em diagrama de blocos dos sistemas de tempo discreto

Será útil nesta parte fazer uma pequena introdução à representação por diagrama de blocos dos sistemas LDT, pois ela facilita o estudo e a sua implementação. As principais operações em sistemas de tempo discreto são mostradas pelos blocos abaixo.

#### a) Bloco somador



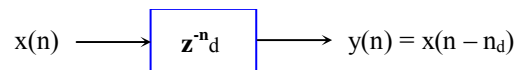
#### b) Bloco multiplicador



#### c) Bloco multiplicador por constante (a)



#### d) Bloco deslocador de amostras



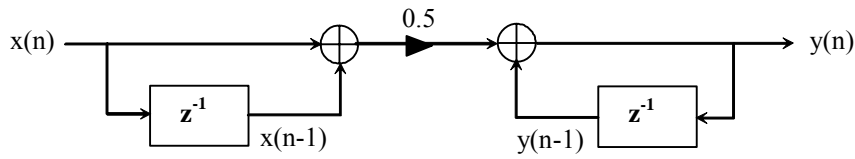
Em que  $z^{-n_d}$  é um operador de atraso que desloca  $x(n)$  por  $n_d$  amostras do sinal. Este resultado ficará aparente no estudo da transformada  $z$ , no capítulo 3.

**Exemplo 11:** Represente através de diagrama de blocos o seguinte sistema:

$$y(n) = y(n - 1) + 0.5x(n) + 0.5x(n - 1)$$

Rearranjando a equação acima de modo a se economizar um bloco multiplicador tem-se que:

$$y(n) = y(n - 1) + 0.5[x(n) + x(n - 1)]$$



**Figura 1.5:** Diagrama em blocos do sistema.

### 1.5.6 Sistemas lineares discretos e invariantes ao deslocamento

As definições dadas anteriormente classificam os sistemas quanto às suas propriedades e categorias tais como: linearidade, invariância ao deslocamento ou ao tempo, causalidade e estabilidade. Os sistemas lineares discretos e invariantes ao deslocamento que serão abreviados por **LID** são os mais importantes destes sistemas. Eles são caracterizados no domínio do tempo por sua resposta à função amostra (ou impulso) unitária e como será visto a seguir, a expressão geral que relaciona a entrada e saída de tais sistemas é dada pela soma de convolução.

Para se determinar a resposta do sistema a uma excitação de entrada  $x(n)$  qualquer, será admitido que  $h(n)$  é a resposta do sistema LID à função amostra unitária. Como foi visto anteriormente, veja equação (1.5), uma sequência  $x(n)$  pode ser escrita como uma soma ponderada de funções amostras unitárias, tal que:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \quad (1.34)$$

Assim, por definição, a resposta de um sistema devido à excitação de entrada  $x(n)$  será dada por:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k)\right] \quad (1.35)$$

Como por hipótese, o sistema é linear, então, aplicando o princípio da superposição tem-se que:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n - k)]$$

Como, também por hipótese, o sistema é admitido ser invariante ao deslocamento, então a resposta à excitação  $\delta(n-k)$  será  $h(n-k)$ , logo,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k) \quad (1.36)$$

Observe que a entrada e a saída estão relacionadas através de  $h(n)$ , como consequência, um sistema LID é caracterizado completamente pela sua resposta à função amostra unitária,  $h(n)$ . Assim, uma vez que é dada a função  $h(n)$ , pode-se determinar a sequência de saída  $y(n)$  devido à excitação de entrada  $x(n)$  através da equação (1.36).

A equação (1.35) é conhecida pelo nome de soma de convolução ou simplesmente convolução entre  $x(n)$  e  $h(n)$ , sendo representada pelo operador  $*$ , isto é,

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (1.37)$$

### 1.5.7 A soma de convolução

Suponha que se quer calcular a saída do sistema em um instante qualquer,  $n = n_0$ . Utilizando a equação (1.36) tem-se que:

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k) \quad (1.38)$$

Observe nesta equação que a soma é realizada nos índices  $k$  e não nos índices  $n$ , além disso, este índice é invertido na resposta ao impulso do sistema. Desse modo pode-se resumir como segue as operações envolvidas na soma de convolução:

- i. Rebate-se  $h(k)$  em torno de  $k = 0$  para se obter  $h(-k)$ ,
- ii. Desloca-se  $h(-k)$  por  $n_0$  amostras à direita, se  $n_0$  for um número positivo (ou à esquerda se  $n_0$  for negativo),
- iii. Multiplica-se cada elemento  $x(k)$  por  $h(n_0 - k)$  para se obter a sequência  $x(k)h(n_0 - k)$ ,
- iv. Somam-se todos os valores da sequência produto para se obter  $y(n_0)$ ,
- v. Repetem-se os passos acima para todos os valores possíveis de  $n$  de modo a obter-se  $y(n)$ .

**Exemplo 12:** Determine a soma de convolução entre as seguintes sequências:  $h(n) = \{1, \mathbf{2}, 1, -1\}$  e  $x(n) = \{\mathbf{1}, 2, 3, 1\}$ . O número em negrito indica o valor da sequência para o índice  $n = 0$ .

- Rebatimento de  $h(k)$ :  $h(-k) = \{-1, 1, \mathbf{2}, 1\}$

- Cálculo de  $y(0)$ :

$$\begin{array}{cccccc} & & & \downarrow k = 0 & & \\ -1 & 1 & 2 & 1 & \leftarrow h(-k) & \\ & & & 1 & 2 & 3 & 1 \leftarrow x(k) \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & \Rightarrow y(0) = 4 \end{array}$$

- Cálculo de  $y(1)$

$$\begin{array}{cccccc} & & & \downarrow k = 0 & & \\ -1 & 1 & 2 & 1 & \leftarrow h(1-k) & \\ & & & 1 & 2 & 3 & 1 \leftarrow x(k) \\ \hline 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & & \Rightarrow y(1) = 8 \end{array}$$

- No final, calculando a convolução para  $n = -1, 0, 1, \dots, 5$ , obtemos  $y(n)$ . Para os outros valores de  $n$  os resultados são nulos.

$$y(n) = \{1, \mathbf{4}, 8, 8, 3, -2, -1\}$$

Note neste exemplo que o tamanho da sequência  $x(n)$  é  $M = 4$ , o tamanho de  $h(n)$  é  $N = 4$  e o de  $y(n)$  é  $L = 7$ . Como regra geral tem-se que para sequência de tamanho finito a convolução produz uma sequência finita de tamanho:

$$L = M + N - 1. \quad (1.39)$$

Uma outra observação importante é que para os sistemas contínuos, lineares e invariantes no tempo, a relação entre entrada e saída é regida pela integral de convolução, neste caso é possível somente estudar

o comportamento teórico destes sistemas. Já os sistemas LID são regidos pela soma de convolução em que é possível, não somente estudar o comportamento teórico, mas também realizá-lo utilizando processadores digitais através da implementação de um algoritmo que resolve a equação (1.36).

### 1.5.7.1 Propriedades da convolução e sistemas LID

a) A soma de convolução é comutativa, isto é,

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (1.40)$$

b) A convolução é associativa, isto é,

$$y(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \quad (1.41)$$

Esta propriedade é interpretada do seguinte modo: Dois sistemas interconectados em cascata correspondem a um sistema equivalente cuja resposta ao impulso é a convolução das respostas ao impulso individuais dos dois sistemas.

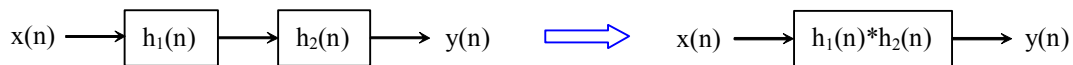


Figura 1.6: Interpretação da lei associativa.

c) A convolução é distributiva, isto é,

$$y(n) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \quad (1.42)$$

Dois sistemas em paralelo correspondem a um sistema cuja resposta ao impulso é a soma das respostas individuais dos sistemas.

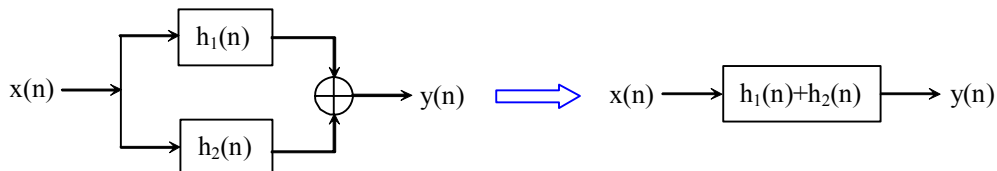


Figura 1.7: Interpretação da lei distributiva.

### 1.5.8 Causalidade e estabilidade em sistemas LID

Para os sistemas lineares discretos e invariantes ao deslocamento, as propriedades de causalidade e estabilidade podem ser prontamente verificadas através da análise da resposta ao impulso do sistema.

a) Causalidade

Considere a saída de um sistema LID em um dado instante  $n_0$ . Desse modo:

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

Desdobrando a equação acima em duas equações tem-se que:

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_0 - k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_0 - k)$$

$$y(n_0) = [\dots h(-2)x(n_0 + 2) + h(-1)x(n_0 + 1)] + [h(0)x(n_0) + h(1)x(n_0 - 1) + \dots]$$

O primeiro termo entre colchetes envolve os valores futuros de  $x(n)$ :  $x(n_0 + 1)$ ,  $x(n_0 + 2)$ , .... Como o sistema é causal a sua resposta não pode depender destes valores (futuros), assim, o primeiro termo deve ser nulo. Para que eles sejam nulos deve-se ter portanto:  $h(-1) = h(-2) = \dots = 0$ , ou seja a resposta ao impulso deve satisfazer a seguinte condição:

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \tag{1.43}$$

Admitindo que se esteja trabalhando com um sistema causal, os limites na somatória de convolução podem ser modificados de modo a refletir a condição estabelecida pela equação (1.43).

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n - k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n - k) \tag{1.44}$$

além disso, se a seqüência de entrada  $x(n)$  também for causal, então:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n - k) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n - k) \tag{1.44}$$

### b) Estabilidade

A estabilidade é também uma propriedade muito importante a ser verificada na implementação de um sistema. Como exposto anteriormente, um sistema é estável se para uma entrada limitada a saída também será limitada. Novamente, utilizando a equação de convolução a admitindo que  $|x(n)| \leq B_x < \infty$ , então módulo da seqüência de saída é,

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n - k) \right| \tag{1.45}$$

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n - k)|$$

mas, por hipótese  $|x(n)| \leq B_x$ , então:

$$|y(n)| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|.$$

Assim, para que o sinal de saída seja limitado deve-se ter que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq B_h < \infty. \tag{1.46}$$

Portanto, para que um sistema LID seja estável, a resposta ao impulso deve ser absolutamente somável. Esta é uma condição necessária e suficiente, além disso ela indica que  $h(n)$  deve ser amortecida, isto é, decair para zero conforme  $n$  se aproxima do infinito.

A resposta ao impulso de um sistema de tempo discreto serve também para classificá-los em relação à sua duração:

- Os sistemas **FIR** (abreviação do inglês *finite impulse response*) são aqueles cuja resposta ao impulso é finita, isto é têm duração limitada.
- Os sistemas **IIR** (abreviação do inglês *infinite impulse response*), isto é, aqueles cuja resposta ao impulso é infinita. Esta nomenclatura será muito utilizada em projeto de filtros digitais.

Observe que os sistemas FIR são sempre estáveis, pois  $h(n)$  apresenta duração finita.

### 1.6 Equação linear de diferenças com coeficientes constantes

Uma das formas de se descrever um sistema LID é através da sua resposta ao impulso e consequentemente através da soma de convolução, contudo, na maioria dos casos é necessário ou desejável expressar o comportamento do sistema em termos dos valores presente e passados do sinal de entrada, e também dos valores passados do sinal de saída. Podemos representar os sistemas discretos através da equação linear de diferenças. Neste caso o sistema é prontamente implementado através de blocos somadores, multiplicadores e de atraso. Além disso, ela serve como base para a obtenção da resposta em frequência do sistema, como será visto mais adiante.

A forma geral para um sistema LID descrito através de uma equação linear de diferenças é dada por:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (1.47)$$

em que os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  são parâmetros constantes do sistema.

Uma forma equivalente de descrever este sistema é através da equação abaixo:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (1.48)$$

em que  $a_0$  é admitido ser igual a 1, e o limite  $N$  da somatória é chamado de ordem do sistema.

Observe que a equação (1.47) expressa a resposta do sistema LID como uma soma ponderada dos valores passados de  $y(n)$ ,  $y(n-1)$ ,  $y(n-2)$ , ...,  $y(n-N)$ , e dos valores presente e passados,  $x(n)$ ,  $x(n-1)$ , ...,  $x(n-M)$ , por isso esta equação também é chamada de recursiva pois a saída depende de valores anteriores da entrada e saída. Além disso para se determinar  $y(n)$  é necessário o conhecimento das condições iniciais do sistema, isto é, de  $y(-1)$ ,  $y(-2)$ , ...,  $y(-N)$ .

A equação (1.47) é a forma geral de uma equação linear de diferenças e representa um sistema cuja resposta ao impulso é infinita (sistema IIR). No caso de sistemas com resposta ao impulso finita (sistemas FIR), a saída depende somente dos valores presentes e passados da entrada. Desse modo,  $a_k = 0 : k = 1, 2, \dots, N$  e fica fácil mostrar que a resposta ao impulso  $h(n)$  é dada pelos próprios coeficientes  $b_k$ , ou seja:

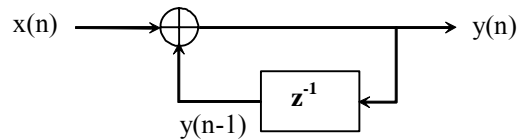
$$h(n) = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, \dots, M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.49)$$

**Exemplo 13:** Determine a equação de diferenças para o sistema acumulador:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = y(n-1) + x(n)$$

Assim, este sistema é representado por uma equação linear de diferenças tal que comparando com a equação (1.48) temos:  $N = 1$ ,  $a_0 = a_1 = 1$ ,  $M = 0$  e  $b_0 = 1$ .



**Figura 1.8:** Diagrama em blocos do acumulador.

### 1.6.1 Solução da equação de diferenças

A solução da equação de diferenças, equação (1.47), é composta de duas partes: A resposta natural (ou homogênea),  $y_n(n)$ , que é devida a uma entrada nula,  $x(n) = 0$ , e a resposta particular (ou forçada)  $y_p(n)$ , devida a uma entrada não nula. **A resposta total do sistema é o resultado das duas respostas anteriores.**

$$y(n) = y_n(n) + y_p(n) \tag{1.50}$$

Para se determinar  $y(n)$  é necessário o conhecimento das condições iniciais do sistema, isto é, o conhecimento de  $y(-1)$ ,  $y(-2)$ , ...,  $y(-N)$ . Se as condições iniciais são nulas o sistema está em repouso, pois não há armazenamento de energia nas memórias do sistema.

#### A resposta natural

A resposta natural é a solução da equação homogênea,

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0 \tag{1.51}$$

Ela apresenta a seguinte forma:

$$y_n(n) = \sum_{i=1}^N c_i r_i^n \tag{1.52}$$

Em que  $r_i$  são as raízes do polinômio característico do sistema:

$$\sum_{i=0}^N a_i r^{n-k} = 0 \tag{1.53}$$

Resolvendo a equação acima calculamos  $r_i$  e os coeficientes  $c_i$  são determinados de modo a satisfazer as condições iniciais. Para o caso em que uma raiz é repetida  $M$  vezes, devem-se acrescentar os termos:

$$r_j^n, nr_j^n, \dots, n^{M-1} r_j^n \tag{1.54}$$

#### A resposta particular (forçada)



A resposta forçada é a solução da equação de diferenças admitindo uma entrada diferente de zero. Como estamos admitindo um sistema linear, a resposta é obtida supondo que a saída tenha a mesma forma da entrada, por exemplo, para uma entrada senoidal a saída também será senoidal provavelmente modificada em amplitude e fase pelo sistema. A tabela abaixo resume as soluções para as entradas mais comuns utilizadas nos sistemas.

**Tabela 1:** Solução particular para algumas entradas.

| Entrada             | Solução particular                |
|---------------------|-----------------------------------|
| 1 (constante)       | c (constante)                     |
| $a^n$               | $ca^n$                            |
| $\cos(w_0n + \phi)$ | $c_1 \cos(w_0n) + c_2 \sin(w_0n)$ |

**Exemplo 14:** Determine a resposta total do sistema LID representado pela equação de diferenças:  $y(n) - 4y(n-2) = x(n)$  quando aplicamos na entrada a função degrau unitário. Admita as seguintes condições iniciais:  $y(-1)=1$  e  $y(-2) = 0$ .

Observe que  $a_0 = 1$   $a_1 = 0$  e  $a_2 = -4$

- Resposta natural:  $r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2$

portanto:  $y_n(n) = c_1(2)^n + c_2(-2)^n$

- Resposta particular: observe que a entrada vale 1 para  $n \geq 0$ , logo  $y_p(n) = c$ . Substituindo na equação de diferenças tem-se:

$$c - 4c = 1 \rightarrow c = -\frac{1}{3} \rightarrow y_p(n) = -\frac{1}{3}, \quad n \geq 0$$

- Resposta total:  $y(n) = y_n(n) + y_p(n) = -\frac{1}{3} + c_1(2)^n + c_2(-2)^n \quad n \geq 0$

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas utilizando as condições iniciais. Assim,

$$y(-1) = 1 = -\frac{1}{3} + c_1(2)^{-1} + c_2(-2)^{-1} \quad \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = \frac{4}{3} \quad (I)$$

$$y(-2) = 0 = -\frac{1}{3} + c_1(2)^{-2} + c_2(-2)^{-2} \quad \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{1}{3} \quad (II)$$

Combinando as equações (i) e (II) tem-se que:  $c_1 = 4$  e  $c_2 = -8/3$

Portanto a resposta total será:

$$y(n) = -\frac{1}{3} + 4(2)^n - \frac{8}{3}(-2)^n \quad n \geq 0$$

### 1.6.2 Resposta ao impulso

A resposta ao impulso de um sistema pode ser encontrada através da resposta ao degrau unitário, supondo que o sistema esteja em repouso, isto é, com condições iniciais nulas. Admitindo  $s(n)$  como a resposta em repouso à função degrau, então, pela equação (1.8), a resposta ao impulso será  $h(n) = s(n) - s(n-1)$ .

**Exemplo 15:** Determine a resposta ao impulso do sistema dado no exemplo 14.

Para determinar a resposta ao impulso admitimos  $y(-1) = y(-2) = 0$ , logo,

$$y(-1) = 0 = -\frac{1}{3} + c_1(2)^{-1} + c_2(-2)^{-1} \quad \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{3} \quad (I)$$

$$y(-2) = 0 = -\frac{1}{3} + c_1(2)^{-2} + c_2(-2)^{-2} \quad \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{1}{3} \quad (II)$$

Combinando as equações (i) e (II) tem-se que:  $c_1 = 1$  e  $c_2 = 1/3$

$$\text{Assim, a resposta total será: } s(n) = -\frac{1}{3} + (2)^n + \frac{1}{3}(-2)^n \quad n \geq 0$$

E a resposta ao impulso será  $h(n) = s(n) - s(n-1)$ :

$$h(n) = \frac{1}{2}(2)^n + \frac{1}{2}(-2)^n \quad n \geq 0$$

## 1.7 Representação de sinais e sistemas discretos no domínio da frequência

Devido ao fato de que quando o sinal de entrada é senoidal a saída de um sistema linear é também um sinal senoidal com mesma frequência da entrada, e a amplitude e fase determinadas pelo sistema, a representação de sinais através de componentes senoidais ou então de exponenciais complexas é muito usual na teoria e prática de sistemas lineares.

Considere um sistema LDI, com resposta ao impulso  $h(n)$ , e em cuja entrada é aplicada uma sequência exponencial complexa da forma:

$$x(n) = e^{jwn}, \quad : -\infty < n < \infty \quad (1.55)$$

A saída do sistema será dada pela soma de convolução entre a entrada  $x(n)$  e a resposta ao impulso do sistema  $h(n)$  tal que:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{jw(n-k)} \quad (1.56)$$

Como o índice  $n$  não entra na somatória,

$$y(n) = e^{jwn} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jwk} \quad (1.57)$$

Vamos definir a seguinte função:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \quad (1.58)$$

Esta função é chamada de **Resposta em Frequência** do sistema. Observe que ela descreve a alteração na amplitude da exponencial complexa,  $e^{j\omega n}$ , em função da sua frequência. A equação (1.58) nada mais é que a **transformada de Fourier** da sequência  $h(n)$ . Assim, podemos escrever que a saída do sistema será:

$$y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (1.59)$$

A saída,  $y(n)$ , é uma exponencial complexa da mesma **forma** que a entrada, mas modificada pela amplitude e fase de  $H(e^{j\omega})$ . Fica assim aparente que  $H(e^{j\omega})$  caracteriza completamente um sistema linear.

Em geral, representa-se a resposta do sistema por uma resposta de amplitude (módulo de  $H(e^{j\omega})$ ) e uma resposta de fase tal que:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})} \quad (1.60)$$

O termo  $|H(e^{j\omega})|$  determina a amplificação (se  $|H(e^{j\omega})| > 1$ ) ou atenuação (se  $|H(e^{j\omega})| < 1$ ) que o sistema impõe no sinal de entrada e o termo  $\angle H(e^{j\omega})$  determina a quantidade de deslocamento de fase imposta no sinal senoidal da entrada. Assim o módulo da resposta em frequência,  $|H(e^{j\omega})|$  é chamado de resposta de amplitude do sistema e o termo  $\angle H(e^{j\omega})$  é chamado de resposta de fase

**Exemplo 16:** Considere o sistema de atraso:  $y(n) = x(n - n_d)$ . Aplicando a sequência exponencial complexa  $x(n) = e^{j\omega n}$  na entrada deste sistema tem-se que:

$$y(n) = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{j\omega n} e^{-j\omega n_d}$$

Comparando a equação acima com a (1.59), concluímos que a resposta em frequência do sistema será dada por:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \Rightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = 1 \\ \angle H(e^{j\omega}) = \omega n_d \end{cases}$$

O conceito de resposta em frequência para os sistemas lineares e invariantes no tempo é o mesmo, tanto para os sistemas contínuos como para os discretos. Contudo, a resposta em frequência para os discretos tem uma diferença fundamental, **ela é sempre periódica, com período igual a  $2\pi$** . Para observar esta característica considere uma frequência  $\omega = \omega + 2\pi$  na equação (1.60). Assim:

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j(\omega+2\pi)k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} e^{-j2\pi k}$$

como  $e^{-j2\pi k} = \cos(2\pi k) - j\sin(2\pi k) = 1$ , então:

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} = H(e^{j\omega}) \quad (1.61)$$

Portanto  $H(e^{j\omega})$  é periódica, com período  $2\pi$ . Desse modo, por conveniência e simplicidade ela será sempre expressa em um dos intervalos abaixo:

$$\begin{cases} 0 \leq w < 2\pi \\ -\pi < w \leq \pi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 \leq f < 1 \\ -0.5 < f \leq 0.5 \end{cases}$$

**Exemplo 17:** Determine a resposta em frequência do sistema cuja resposta ao impulso é dada abaixo, e também a sequência de saída, quando a sequência de entrada é dada por:  $x(n) = Ae^{jn\pi/2}$ .

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

- Cálculo da resposta em frequência do sistema, equação (1.58):

$$H(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-jwn} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-jw}}$$

- Determinação da sequência de saída, equação (1.59):

$$y(n) = H(e^{j\pi/2})Ae^{jn\pi/2} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{3}}Ae^{jn\pi/2} = A\left(\frac{3}{\sqrt{10}}e^{-j0.32}\right)e^{jn\pi/2} = A\frac{3}{\sqrt{10}}e^{j(n\pi/2 - 0.32)}$$

Este exemplo mostra que a saída continua sendo uma exponencial complexa com a mesma frequência da entrada, com um deslocamento de fase provocado pelo sistema igual a  $-0.32$  radianos e uma alteração na amplitude pelo fator  $3/\sqrt{10}$ .

As mesmas conclusões seriam validas se a entrada fosse uma sequência senoidal real. Se a entrada do sistema consistir de mais que um sinal senoidal aplica-se o princípio da superposição.

## 1.8 Transformada de Fourier para sequências

O par de transformadas de Fourier para uma sequência ou sinal discreto  $x(n)$  é definido pelas seguintes equações:

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} \quad (1.62)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})e^{jwn} dw. \quad (1.63)$$

A equação (1.62) é a transformada de Fourier direta para sequências ou sinais discretos, também chamada de equação de análise, e a equação (1.63) é a transformada de Fourier inversa ou equação de síntese pois reproduz  $x(n)$  a partir de seu espectro de frequência. A transformada  $X(e^{jw})$  é uma função complexa e portanto é usual escrevê-la na forma polar, isto é,

$$X(e^{jw}) = |X(e^{jw})|e^{j\angle X(e^{jw})}. \quad (1.64)$$

O módulo da transformada é conhecido como **espectro de amplitude**, e a fase como **espectro de fase**. O espectro de fase não é determinado unicamente, desde que qualquer inteiro múltiplo de  $2\pi$  pode ser somado à fase sem afetar o resultado final. Em geral, determina-se o valor principal, identificado por

$\text{ARG}[X(e^{jw})]$  e com valores entre  $\pm \pi$ . Como discutido na seção anterior, tanto o espectro de fase como o de amplitude são periódicos com período  $2\pi$ .

Uma pergunta que se origina durante o cálculo da transformada é: “Qual a classe de sinais de tempo discreto que pode ser representada pela transformada de Fourier?” Neste caso deve-se analisar a convergência da transformada. Para que a transformada exista, a equação (1.62) deve convergir, isto é, a condição abaixo deve ser satisfeita:

$$|X(e^{jw})| < \infty \quad : 0 \leq w < 2\pi \quad (1.65)$$

Observe que:

$$|X(e^{jw})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|e^{-jwn},$$

$$|X(e^{jw})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty. \quad (1.66)$$

Portanto, a condição suficiente para que a transformada de Fourier exista é que  $x(n)$  seja **absolutamente somável**.

**Exemplo 18:** Determine a transformada de Fourier da sequência  $x(n) = a^n u(n)$ .

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-jw})^n$$

Observe que a série acima é uma progressão geométrica com razão  $ae^{-jw}$ . Admitindo que  $|ae^{-jw}| < 1$ , o que é equivalente a admitir que  $|a| < 1$ , tem-se que:

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{1 - ae^{-jw}} \quad (1.67)$$

A condição anterior  $|a| < 1$  implica a sequência  $x(n)$  é absolutamente somável, garantindo a convergência uniforme da série

Uma observação importante a se fazer é que existem algumas sequências que não garantem a condição da equação (1.66), mas mesmo assim é possível encontrar a sua transformada de Fourier. Em particular, é possível relaxar esta condição e calcular a transformada de Fourier de sequências cuja energia é infinita. Existem outros casos onde as sequências não são nem absolutamente somáveis, nem têm energia finita, mas é possível calcular a transformada fazendo uso da função impulso unitário. (Veja Openheim, 1989, exemplo pp 49).

### 1.8.1 Espectro densidade de energia

Foi definido na seção 1.3.1 que a energia de um sinal é dada por:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$$

Utilizando a definição da transformada inversa de Fourier, equação (1.63), a transformada de Fourier inversa do conjugado de uma sequência é,

$$x^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{jw}) e^{-jwn} dw$$

substituindo na equação acima se tem que:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{jw}) e^{-jwn} dw \right\}$$

Trocando a ordem das operações da somatória com a integral,

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{jw}) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \right\} dw$$

Observe que a quantidade entre parêntesis é a transformada de Fourier de x(n). Assim, a energia de x(n) pode ser determinada utilizando a sua transformada de Fourier, ou seja,

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{jw}) X(e^{jw}) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{jw})|^2 dw \quad (1.68)$$

A quantidade:

$$S_x(e^{jw}) = |X(e^{jw})|^2 \quad (1.69)$$

representa a distribuição de energia da sequência x(n) em função da frequência e por isso mesmo ela é chamada de **Espectro Densidade de Energia** de x(n)

**Exemplo 19:** Determine a transformada de Fourier e o espectro densidade de energia da sequência,

$$x(n) = \begin{cases} A, & 0 \leq n < M - 1 \\ 0, & c. c. \end{cases}$$

Admitindo que M seja um número finito, x(n) é absolutamente somável e portanto apresenta transformada de Fourier, pois,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{M-1} |A| = M|A| < \infty$$

Cálculo de X(e<sup>jw</sup>):

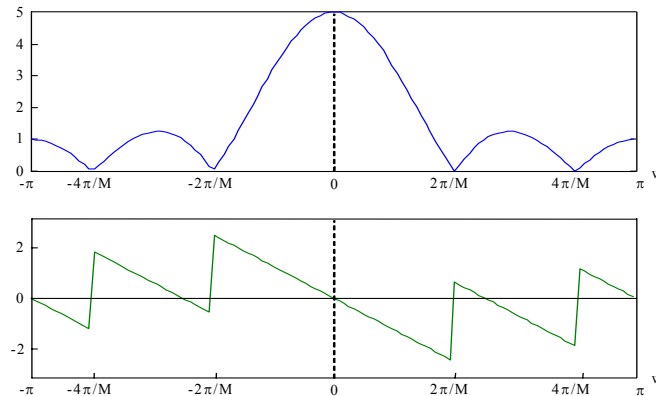
$$X(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{M-1} A e^{-jwn} = A \frac{1 - e^{-jwM}}{1 - e^{-jw}} = A e^{-jw(M-1)/2} \frac{\text{sen}wM / 2}{\text{sen}w / 2}$$

O módulo e a fase do espectro são:

$$|X(e^{j\omega})| = \begin{cases} \left| A \frac{\text{sen}\omega M / 2}{\text{sen}\omega / 2} \right|, & -\pi \leq \omega < \pi \\ M|A|, & \omega = 0 \end{cases} \quad e \quad \angle X(e^{j\omega}) = -\omega(m-1)/2$$

O espectro densidade de energia é dado pelo quadrado do módulo de  $X(e^{j\omega})$ , assim:

$$S(e^{j\omega}) = \left( A \frac{\text{sen}\omega M / 2}{\text{sen}\omega / 2} \right)^2$$



**Figura 1.9:** Espectro de amplitude e de fase para o exemplo 17, admitindo  $A = 1$  e  $M = 5$ .

### 1.8.2 Propriedades da transformada de Fourier para sinais discretos

No cálculo da transformada de Fourier, o conhecimento e utilização de certas propriedades facilitam o uso e interpretação dos resultados.

#### a) Simetria

Quando o sinal satisfaz certas propriedades de simetria no domínio do tempo, estas impoem certas propriedades na transformada. Antes de listar estas propriedades considere as seguintes definições:

Sequência conjugada simétrica:  $x_e(n) = x_e^*(-n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)]$  (1.70)

Sequência conjugada anti-simétrica:  $x_o(n) = -x_o^*(-n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(-n)]$  (1.71)

#### Propriedades de simetria

1.  $x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$  (1.72)

2.  $Re\{x(n)\} \leftrightarrow X_e(e^{j\omega})$  (1.73)

3.  $j Im\{x(n)\} \leftrightarrow X_o(e^{j\omega})$  (1.74)

4.  $x_e(n) \leftrightarrow X_R(e^{j\omega})$  (1.75)

$$5. \quad x_o(n) \leftrightarrow jX_I(e^{jw}) \quad (1.76)$$

Admitindo  $x(n)$  uma sequência real tem-se  $X(e^{jw})$  é:

$$6. \quad \text{Conjugada simétrica: } X(e^{jw}) = X^*(e^{-jw}) \quad (1.77)$$

$$7. \quad \text{A sua parte real é par: } X_R(e^{jw}) = X_R(e^{-jw}) \quad (1.78)$$

$$8. \quad \text{A sua parte imaginária é ímpar: } X_I(e^{jw}) = -X_I(e^{-jw}) \quad (1.79)$$

$$9. \quad \text{O seu módulo é par: } |X(e^{jw})| = |X(e^{-jw})| \quad (1.80)$$

$$10. \quad \text{A sua fase é ímpar: } \angle X(e^{jw}) = -\angle X(e^{-jw}) \quad (1.81)$$

### b) Propriedades e teoremas gerais

Além das propriedades de simetria, têm-se também outras propriedades muito importantes que relacionam operações com sequências e facilitam o uso e obtenção de resultados teóricos com sinais e sistemas. Estas propriedades são listadas abaixo sem a preocupação em prová-las. Desde que elas são similares ao caso da transformada de Fourier para sinais contínuos recomenda-se como exercício a prova destas propriedades.

#### 1. Linearidade

$$ax(n) + by(n) \leftrightarrow aX(e^{jw}) + bY(e^{jw}) \quad (1.82)$$

#### 2. Deslocamento no domínio do tempo

$$x(n - n_d) = e^{-jwn_d} X(e^{jw}) \quad (1.83)$$

#### 3. Deslocamento no domínio da frequência

$$e^{jw_0n} x(n) = X(e^{j(w-w_0)}) \quad (1.84)$$

#### 4. Reversão do tempo

$$x(-n) = X(e^{-jw}) \quad (1.85)$$

#### 5. Diferenciação no domínio da frequência

$$nx(n) = j \frac{d}{dw} X(e^{-jw}) \quad (1.86)$$

#### 6. Teorema de Parseval

Este teorema relaciona o cálculo da energia do sinal no domínio do tempo com o cálculo no domínio da frequência (ver espectro densidade de energia seção 1.7.1)

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{jw})|^2 dw \quad (1.87)$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})Y^*(e^{jw})dw \quad (1.88)$$

**7. Teorema da convolução**

$$x(n) * y(n) = X(e^{jw})Y(e^{jw}) \quad (1.89)$$

**8. Teorema da modulação ou janelamento**

$$w(n)x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y^*(e^{j(w-\theta)})d\theta \quad (1.90)$$

**Exemplo 20:** Determine a transformada de Fourier da seguinte sequência,

$$x(n) = a^{|n|} \quad : |a| < 1$$

Para resolver este exemplo vamos expressar x(n) como a soma de duas sequências, x<sub>1</sub>(n) e x<sub>2</sub>(n),

$$x_1(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad e \quad x_2(n) = \begin{cases} a^{-n}, & n < 0 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

A transformada de Fourier da sequência x<sub>1</sub>(n) já foi calculada no exemplo 16 e vale:

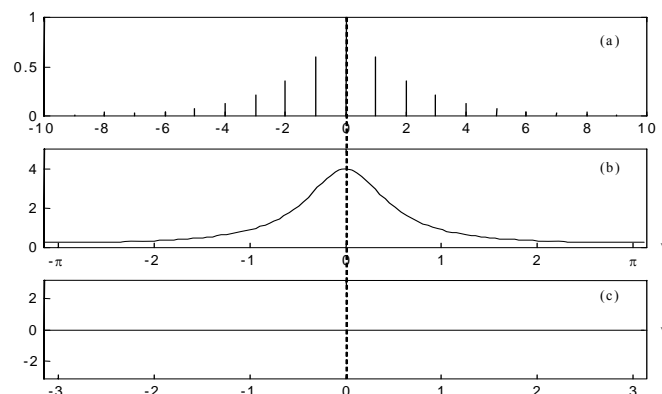
$$X_1(e^{jw}) = \frac{1}{1 - ae^{-jw}}$$

- Cálculo de X<sub>2</sub>(e<sup>jw</sup>):  $X_2(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-jwn} = \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{jw})^n = \frac{ae^{jw}}{1 - ae^{jw}}$

Aplicando o teorema da linearidade tem-se que:

$$X(e^{jw}) = X_1(e^{jw}) + X_2(e^{jw}) = \frac{1}{1 - ae^{-jw}} + \frac{ae^{jw}}{1 - ae^{jw}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos w + a^2}$$

Como |a| < 1, o espectro de fase é nulo pois X(e<sup>jw</sup>) é real e sempre positiva.



**Figura 1.10:** (a) sequência x(n), (b) espectro de amplitude; (c) espectro fase para o exemplo 19.

**Exemplo 21:** Determine o módulo e a fase da função do sistema do filtro de média móvel, dado pela equação de diferenças abaixo:

$$y(n) = \frac{1}{3} \{x(n+1) + x(n) + x(n-1)\}$$

Observe que este é um filtro FIR (resposta ao impulso finita), a saída depende somente de valores presentes ou passados da entrada. Assim,

$$h(n) = \frac{1}{3} \delta(n+1) + \frac{1}{3} \delta(n) + \frac{1}{3} \delta(n-1)$$

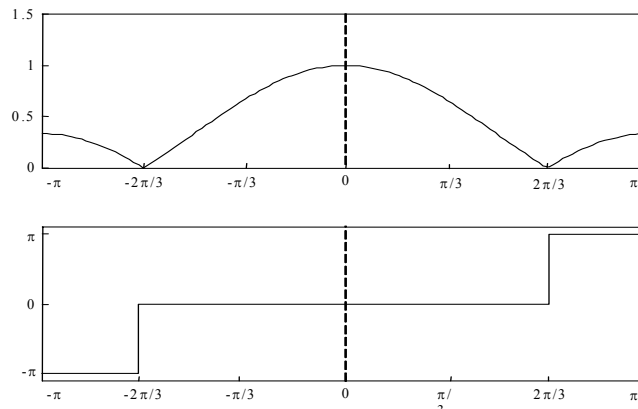
Calculando a transformada de Fourier:

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{3} \{e^{jw} + 1 + e^{-jw}\} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos w$$

Portanto:

$$|H(e^{jw})| = \frac{1}{3} |1 + 2 \cos w|$$

$$\phi(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq w \leq 2\pi/3 \\ \pi, & 2\pi/3 < w < \pi \end{cases}$$



**Figura 1.11:** Espectro de amplitude e de fase para o exemplo 20.

Nos dois exemplos acima se pode observar que a resposta de amplitude é uma função par da frequência e a de fase é uma função ímpar.

A representação de um sinal no domínio da frequência é importante para se observar e analisar o conteúdo de frequências de um sinal ou de um sistema. Em processamento de sinais esta informação é muito importante e usual. Por exemplo, na análise de efeitos de filtragem, deve-se examinar e conhecer o comportamento do sinal a ser filtrado no domínio da frequência, e a qualidade e desempenho dos filtros também é estabelecida analisando a resposta em frequência destes. Quando se deseja transmitir sinais em um canal de telecomunicações deve-se conhecer a sua resposta em frequência para que, baseando-se nesta

informação, seja possível decidir que faixa ou grupo de frequências podem ser transmitidas através do canal com pouca distorção.

A tabela 2, mostrada abaixo, relaciona algumas seqüências básicas frequentemente utilizadas em processamento de sinais, juntamente com suas respectivas transformadas de Fourier.

**Tabela 2:** Pares de transformadas de Fourier.

| Seqüência   | Transformada de Fourier  |
|---|--|
| 1. $\delta(n)$  | 1  |
| 2. $\delta(n - n_d)$  | $e^{-j\omega n_d}$   |
| 3. $a^n u(n) \quad :  a  < 1$   | $\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$  |
| 4. $u(n)$   | $\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi k)$ |
| 5. $\frac{r^n \text{sen } \omega_0(n+1)}{\text{sen } \omega_0} u(n) \quad :  r  < 1$  | $\frac{1}{1 - r \cos \omega_0 e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$                     |
| 6. $\frac{\text{sen } \omega_0 n}{\pi n}$   | $\begin{cases} 1, &  w  < \omega_0 \\ 0, & \omega_0 <  w  \leq \pi \end{cases}$      |
| 7. $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ | $\frac{\text{sen } \omega M / 2}{\text{sen } \omega / 2} e^{-j\omega(M-1)/2}$        |
| 8. $e^{j\omega_0 n}$  | $2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$                  |

### Exercícios

1. Considere a sequência  $x(n) = (5-n)[u(n) - u(n-5)]$ . Desenhe:

- a)  $x(n)$
- b)  $y_1(n) = x(n-2)$
- c)  $y_2(n) = x(3-n)$
- d)  $y_3(n) = x(2n-2)$

2. Um sinal discreto é definido por:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{|n|+1}, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

- (a) Determine a sequência  $x(n)$  e desenhe o sinal.
- (b) Desenhe o sinal  $x(n-2)$ .
- (c) Desenhe o sinal  $x(n+2)$ .
- (d) Desenhe o sinal  $x(n) \cdot u(n)$ .

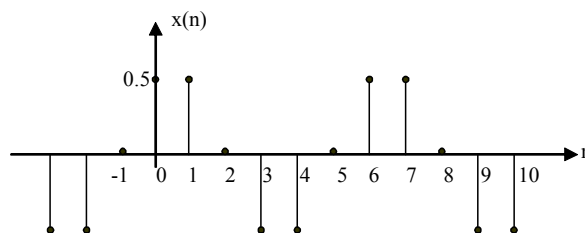
3. Desenhe as seguintes sequências:

- (a)  $x(n) = \cos[(\pi/2)n]$
- (b)  $x(n) = \cos[(\pi/6)n]$
- (c)  $x(n) = u(n) - u(n-5)$
- (d)  $x(n) = (0.5)^n u(n)$
- (e)  $x(n) = 2^n u(n)$

4. Para os itens (a) e (b) do exercício anterior, admitindo  $T_a = 0.001$ , determine os sinais contínuos no tempo que geraram as sequências.

5. Expresse os sinais abaixo em termos de funções padrões. (admitida que eles sejam senoidais).

(a)



(b)  $x(n) = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$

6. Expresse a sequência abaixo em função de funções degrau unitário ponderadas.

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & c. c. \end{cases}$$

7. Para cada um dos sinais abaixo, esboce  $x(n)$  e determine  $E_x$  ou  $P_x$  e  $M_x$ .

- (a)  $x(n) = e^{-\pi n/2} u(n)$
- (b)  $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[\pi(n-6k)/6] \{u(n-6k) - u(n-6k-3)\}$
8. Determine a convolução para os seguintes pares de sinais:
- a)  $x(n) = \{1, 2\}$  e  $h(n) = \{1, 2, -1\}$
- b)  $x(n) = \delta(n)$  e  $h(n) = \{1, 2, 3\}$
- c)  $x(n) = \alpha^n u(n)$  e  $h(n) = \beta^n u(n)$   $\alpha \neq \beta$
- d)  $x(n) = h(n) = \alpha^n u(n)$
9. Determine a resposta ao impulso dos sistemas dados abaixo. (considere condições iniciais nulas)
- (a)  $y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + 4x(n-2) + x(n-4)$
- (b)  $y(n) = 0.5x(n-2) + x(n-1) + 0.5x(n) + 0.25x(n-1)$
- (c)  $y(n) = x(n) + ay(n-1)$
- (d)  $y(n) = x(n) + ay(n-2)$
- (e)  $y(n) = x(n) + x(n-1) + ay(n-1)$
- (f)  $y(n) = x(n) + y(n-1) - \frac{1}{4} y(n-2)$
- (g)  $y(n) = x(n) + x(n-2) + y(n-1) - \frac{1}{4} y(n-2)$
10. Para cada sistema abaixo determine se eles são ou não: lineares, invariantes ao deslocamento, causais, estáveis, com ou sem memória. Prove as propriedades ou forneça um contra exemplo e encontre a resposta ao impulso.
- (a)  $y(n) = x(n) + \frac{1}{2} y(n-1)$
- (b)  $y(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ par} \\ -x(n), & n \text{ ímpar} \end{cases}$
- (c)  $y(n) = \sum_{k=-1}^1 x(n-k)$
- (d)  $y(n) = \begin{cases} 1, & x(n) > 1 \\ x(n), & -1 \leq x(n) \leq 1 \\ -1, & x(n) < -1 \end{cases}$
- (e)  $y(n) = x(2n)$
11. Para os sistemas abaixo encontre a resposta ao impulso, a resposta em frequência (simplifique o máximo possível a equação), esboce o espectro de amplitude e descreva em termos gerais o efeito de filtragem em um sinal.
- (a)  $y(n) = x(n) - y(n-2)$
- (b)  $y(n) = 2x(n) + x(n-1) + \frac{1}{2} y(n-1)$
- (c)  $y(n) = \frac{1}{4} \{x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)\}$
- (d)  $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2) + 2x(n-3) + x(n-4)$

12. Considere o sistema LID descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$$

- (a) Determine  $h(n)$ ,
- (b) Determine  $H(e^{j\omega})$ ,
- (c) Encontre a resposta deste sistema à entrada  $x = \{ 1, 0.5, 0.25 \}$

13. Considere o sistema SLI descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 0.5y(n-1)$$

- (a) Determine  $h(n)$ ,
- (b) Determine  $H(e^{j\omega})$ ,
- (c) Encontre a resposta deste sistema à entrada  $x(n) = u(n)$
- (d) Diagrama em blocos do sistema.

14. Considere o sistema causal LID descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) - bx(n-1)$$

Encontre o valor de  $a \neq b$  para que a sua resposta em amplitude seja constante para qualquer frequência. Este tipo de filtro é chamado de passa tudo.

15. Calcule a transformada de Fourier das seguintes sequências:

- (a)  $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- (b)  $x(n) = (-1)^n \{u(n) - u(n-8)\}$
- (c)  $x(n) = \begin{cases} 1, & n = 2 \\ -1, & n = -2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
- (d)  $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{10}n + \frac{\pi}{5}\right)$
- (e)  $y(n) = j^n x(n)$
- (f)  $y(n) = x(n) * x(-n)$

16. Determine a equação de diferenças que caracteriza o sistema cuja resposta em frequência é dada por:

- (a)  $H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$
- (b)  $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}{1 - e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}$
- (c)  $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} - \frac{1}{2}}{e^{j2\omega} + e^{j\omega} - \frac{1}{2}}$

17. Se a resposta ao degrau unitário de um sistema linear invariante ao deslocamento é:

$$s(n) = n \left( \frac{1}{a} \right)^n u(n), \quad a > 1. \text{ Determine a resposta ao impulso } h(n) \text{ deste sistema.}$$

$$\text{Note que: } \delta(n) = u(n) - u(n-1) \Rightarrow h(n) = s(n) - s(n-1)$$

18. Considere o filtro digital abaixo. Admitindo uma frequência de amostragem igual 8000 Hz, determine as frequências de corte inferior e superior e a largura de banda do filtro analógico equivalente.

**Exercícios no computador:**

19. Utilizando o Matlab gere e desenhe os sinais abaixo:

- (a)  $x(n) = \cos[(\pi/N)n]u(n) : N = 2, 5 \text{ e } 10$
- (b)  $x(n) = u(n) - u(n-5)$
- (c)  $x(n) = \delta(n)$
- (d)  $x(n) = (0.5)^n u(n)$
- (e)  $x(n) = 2^n u(n)$
- (f) ruído branco gaussiano com valor médio zero e desvio padrão igual a 1.
- (g) Ruído branco com distribuição uniforme entre 0 e 1, e entre  $-0.5$  e  $0.5$

20. Considere o seguinte sistema LID:

$$y(n) = \frac{1}{N} \{x(n) + x(n-1) + \dots + x(n-N+1)\}$$

- (a) Determine  $H(e^{j\omega})$  e também o módulo e a fase,
- (b) Utilize o Matlab para desenhar o módulo e a fase ( $|\omega| \leq \pi$ ) admitindo  $N=4, 5, 10$  e  $20$ .
- (c) Comente os resultados.

21. Considere o seguinte sistema LID:

$$y(n) = \frac{1}{3} \{x(n) + x(n-1) + x(n-3)\}$$

Utilize o Matlab para desenhar (utilize a função gráfica *stem*) a saída  $y(n)$  admitindo:

- (a)  $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 20 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
- (b)  $x(n) = 2^{-n} \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)u(n)$





Capítulo 2

AMOSTRAGEM DE SINAIS

2.1. Sinais de tempo discreto

Os sinais de tempo discreto apresentam valores definidos somente em determinados instantes do tempo. Geralmente eles provêm de sinais (ou funções) no tempo contínuo que são medidos ou gravados em intervalos de tempo regularmente espaçados. Nas últimas décadas estes sinais assumiram grande importância devido ao desenvolvimento da eletrônica digital e dos computadores pessoais. Por ser impossível introduzir dados contínuos nos computadores digitais, qualquer sinal ou dado necessita ser representado por um conjunto de números para processamento posterior. Se pretendermos trabalhar com sinais de tempo discreto, primeiramente devemos amostrar o seu equivalente de tempo contínuo. Na prática a operação de amostragem é executada por um conversor AD (conversor analógico-digital) que inclui também a quantização das amplitudes das amostras e a digitalização. Assim, a saída do conversor AD é uma série de valores digitais. A operação reversa para a reconstrução de um sinal contínuo a partir de suas amostras é conhecida como conversão digital analógica (DA). A teoria da amostragem tem um papel muito importante no desempenho de qualquer sistema de processamento digital de sinais. Neste capítulo será apresentada uma breve discussão sobre a teoria da amostragem de sinais, que estabelece as condições básicas para que um sinal de tempo contínuo seja representado unicamente por suas amostras tomadas em instantes de tempo regularmente espaçados.

2.2. A amostragem de sinais

A teoria da amostragem é a base matemática para se obter um sinal  $x(n)$  de tempo discreto a partir de um sinal  $x(t)$  de tempo contínuo. A obtenção de uma sequência de amostras  $x(n)$  a partir de um sinal  $x(t)$  contínuo no tempo pode ser representada pela seguinte relação:

$$x(n) = x(t) \Big|_{t=nT_a} = x(nT_a) \tag{2.1}$$

em que  $T_a$  é chamado de **período de amostragem**, e  $n$  é um número pertencente ao conjunto dos números inteiros. O inverso deste período,  $F_a = 1/T_a$ , é chamado de **frequência de amostragem**, com unidade em amostras por segundo ou em Hz.

A sequência de números  $x(n)$  é algumas vezes denotada por vetor  $\mathbf{x} = \{x(n)\}$ ,  $-\infty < n < +\infty$ , em que  $x(n)$  é o  $n$ -ésimo elemento da sequência. Um exemplo de um sinal de tempo discreto é mostrado na figura 2.1, em que as amostras são tomadas em intervalos regularmente espaçados por  $T_a$  segundos e as raias perpendiculares ao eixo do tempo representam o sinal de tempo discreto. Note que entre dois intervalos de tempo sucessivos nada é definido sobre o sinal.

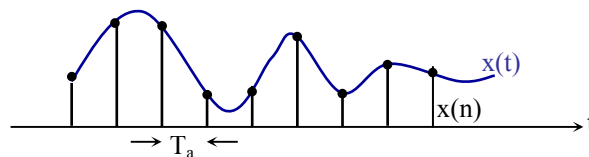


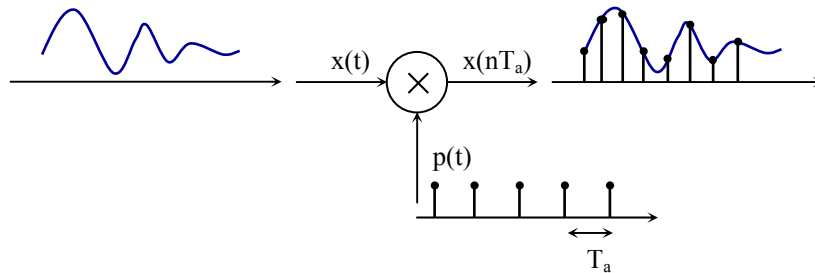
Figura 2.1: Sinal amostrado.

Uma maneira de se visualizar o processo de amostragem é ilustrado pelo diagrama de blocos da figura 2.2. O sinal de tempo contínuo  $x(t)$  é aplicado a um multiplicador. Este sinal é multiplicado por uma sequência periódica de impulsos regularmente espaçados por  $T_a$  segundos  $p(t)$ , chamado de trem de impulsos, tal que:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a) \tag{2.2}$$

Na saída do multiplicador temos o seguinte sinal:

$$x_a(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_a)\delta(t - nT_a) = x(nT_a) \tag{2.3}$$



**Figura 2.2:** Representação do processo de amostragem.

A multiplicação do sinal pelos impulsos converte  $x(t)$  em um sinal de tempo discreto, e forma uma sequência de números  $x(n)$  em que os valores das amostras são indexados pela variável inteira  $n$ , ou seja,

$$x(n) = x(nT_a) \tag{2.4}$$

Assim, como visto no capítulo 1, admitindo  $n \geq 0$ , a sequência  $x(n)$  pode ser escrita como uma soma de impulsos unitários ponderados tal que:

$$x(n) = x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n - 1) + x(2)\delta(n - 2) + \dots \tag{2.5}$$

ou seja,  $x(n)$  pode ser considerada uma sequência de números (um vetor), que em última análise representa o sinal original. Esta sequência de números pode ser transmitida ou então armazenada em um computador para o processamento (tratamento) digital do sinal.

**Tabela 1: Valores tabelados ou armazenados relativos ao sinal real.**

| <b>n</b> | <b>sinal no instante n</b> |
|----------|----------------------------|
| 0        | $x(0)$                     |
| 1        | $x(1)$                     |
| 2        | $x(2)$                     |
| 3        | $x(3)$                     |
| 4        | $x(4)$                     |
| $\vdots$ | $\vdots$                   |

Observe que o sinal, ou sequência  $x(n)$ , é discreto no tempo, mas os seus valores ou amplitudes para cada índice de tempo pertencem ao campo dos números reais.

### 2.3. O teorema da amostragem

O efeito da amostragem em um sinal é melhor analisado no domínio da frequência utilizando a transformada de Fourier (Joaquim e Sartori, 2003). Sabe-se da teoria de Fourier que a transformada da função trem de impulsos em (2.2) é dada por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_a) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_a)$$

em que  $\Omega_a = 2\pi/T_a$ .

A transformada de Fourier do sinal da equação (2.3), que é o produto de duas funções, será dada pela convolução entre as transformadas de  $x(t)$  e  $p(t)$ : assim:

$$X_a(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * P(\Omega) \quad 2.6$$

em que  $X_a(\Omega)$  é a transformada de Fourier do sinal amostrado. Assim,

$$X_a(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * \frac{2\pi}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_a),$$

trocando a ordem da somatória com a convolução tem-se,

$$X_a(\Omega) = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega) * \delta(\Omega - k\Omega_a),$$

portanto,

$$X_a(\Omega) = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_a) \quad 2.7$$

Note que o espectro do sinal amostrado é periódico, com período  $\Omega_a$ , pois estamos no domínio da frequência. Ele consiste de um número infinito de cópias do espectro  $X(\Omega)$ , do sinal de tempo contínuo. Estas cópias são regularmente espaçadas pela frequência de amostragem  $\Omega_a$ . A figura 2.3, mostra um exemplo da amostragem de sinais considerando o domínio da frequência.

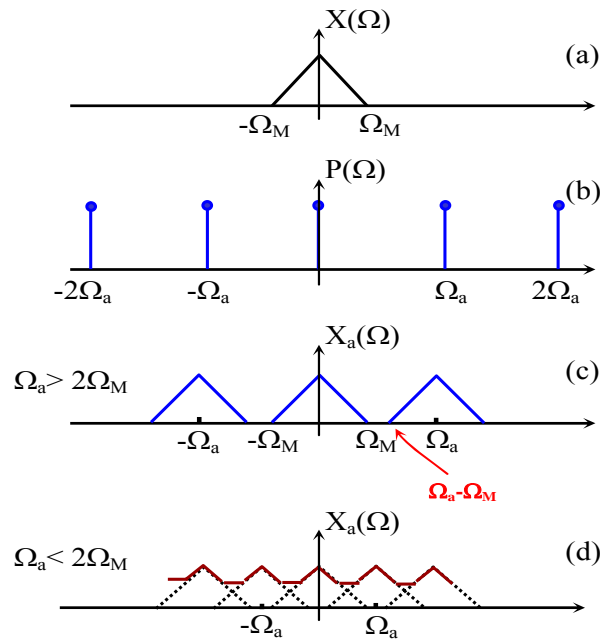
Analisando a equação (2.7) e com o auxílio da figura 2.3.d, podemos observar que as cópias repetidas do espectro de  $x(t)$  podem se sobrepor. Primeiramente devemos observar que para que estas cópias não interfiram umas com as outras, o espectro de  $x(t)$  deve ser limitado em uma frequência máxima. Seja  $\Omega_M$  a frequência máxima do sinal a ser amostrado. Observando a figura 2.3.c nota-se claramente que para não haver superposição espectral deve-se ter que:

$$\Omega_M \leq \Omega_a - \Omega_M \quad 2.8$$

Desse modo, para que não haja superposição, a frequência de amostragem deve ser no mínimo o dobro da frequência máxima do sinal, isto é,

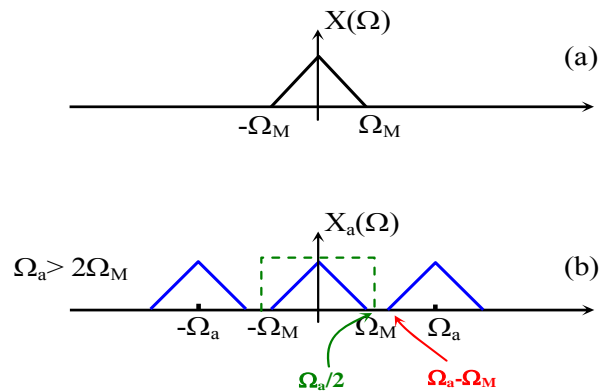
$$\Omega_a \geq 2\Omega_M \quad 2.9$$

Se a condição acima não é satisfeita, ou seja,  $\Omega_a < 2\Omega_M$ , as cópias do espectro de  $x(t)$  se superpõem, causando a perda no formato do espectro original. Observe a ilustração na figura 2.3.d. Este fenômeno é conhecido na literatura como *aliasing* (superposição espectral). Neste caso o espectro original é perdido e não pode mais ser recuperado a partir do sinal amostrado.



**Figura 2.3:** Efeito da amostragem no domínio da frequência. Neste caso  $X(\Omega)$  é o espectro do sinal contínuo no tempo, e  $X_a(\Omega)$  é o espectro do sinal amostrado.

Por outro lado se a condição em (2.9) é satisfeita o espectro original da banda básica (em torno de frequência zero) é mantido inalterado e pode ser recuperado através de uma filtragem por um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte  $\Omega_a/2$ .



**Figura 2.4:** Espectro do sinal original e sinal amostrado sem *aliasing*.

Com as considerações acima, podemos agora enunciar facilmente o **teorema da amostragem** como segue:

Se  $x(t)$  é um sinal estritamente de banda limitada, isto é,

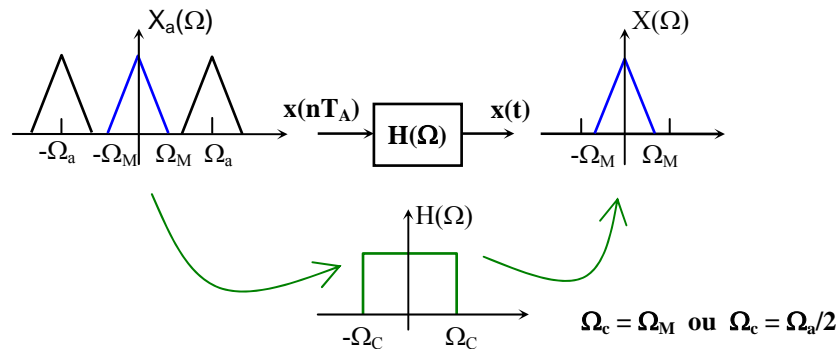
$$X(\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \Omega_M,$$

então este sinal  $x(t)$  pode ser recuperado a partir de suas amostras  $x(nT_a)$  se:

$$\Omega_a = \frac{2\pi}{T_a} \geq 2\Omega_M \tag{2.10}$$

A frequência  $\Omega_M$  é chamada de frequência de Nyquist, e a frequência mínima de amostragem,  $2\Omega_M$ , é chamada de taxa de Nyquist.

Todos os sinais encontrados nos sistemas físicos nunca são, estritamente falando, de banda limitada, assim, antes do processo de amostragem é comum filtrar o sinal (filtro *anti-aliasing*) a fim de se minimizar a energia do sinal acima da frequência de Nyquist (limitar o sinal em banda), para, desse modo, minimizar o efeito do *aliasing* que ocorre durante a conversão analógico-digital.



**Figura 2.5:** Reconstrução do sinal: filtragem do sinal amostrado e recuperação do sinal original.

### Algumas considerações práticas

Na realidade impulsos com duração nula não existem. Na prática a amostragem é realizada através de um circuito amostrador-segurador. O sinal amostrado é aproximado por uma aproximação em degraus entre dois instantes adjacentes de amostragem, e em seguida quantizado. Neste caso o filtro de reconstrução deve ser levemente modificado para compensar a aproximação em degraus (oppenheim 1979, Joaquim, 2003).

Como dito anteriormente, para assegurar que não haja ocorrência da superposição espectral (*aliasing*), o sinal antes de ser amostrado é filtrado a fim de limitá-lo em banda, em uma frequência máxima, por exemplo,  $\Omega_M$ . Este filtro é chamado de filtro *anti-aliasing*, e serve também para limitar o ruído presente no sinal de tempo contínuo, antes do processo de conversão analógico-digital. Ele serve também para facilitar o projeto prático do filtro de reconstrução, que não apresenta uma transição abrupta entre a banda de passagem e de atenuação, a taxa de amostragem é feita levemente superior à de Nyquist. Na figura 2.5  $H(\Omega)$  representa um filtro de reconstrução ideal.

O ouvido humano é capaz de identificar frequências entre 20 Hz e 20 kHz. Para sinais de áudio a frequência amostragem é padronizada em 44.1 kHz em vez de 40 kHz. Em telefonia a 90% da energia do sinal da fala está presente em frequências até 3.4 kHz, que é suficiente para preservar a qualidade das conversações, e a taxa de amostragem é padronizada em 8 kHz em vez de 6.8 kHz, permitindo uma banda de guarda de 1.2 kHz que facilita o projeto prático do filtro de reconstrução. Em pesquisa a taxa de amostragem é muitas vezes elevada para 10 kHz.

## 2.4. Conversão da taxa de amostragem

Em algumas aplicações especiais, como por exemplo alguns tipos de codificação de banda, existe a necessidade da modificação da taxa de amostragem de uma sequência  $x(n)$ . Podemos reduzir ou aumentar a taxa de amostragem por um determinado fator inteiro, ou então modificá-la por um fator racional. Este processo é conhecido como conversão da taxa de amostragem e pode ser realizado diretamente no sinal de tempo discreto

### Redução na taxa de amostragem por um fator inteiro

A redução da taxa de amostragem por um fator inteiro,  $M$ , é feita tomando todas as amostras do sinal múltiplas de  $M$ , isto é,

$$x_d(n) = x(t)|_{t=nMT_a} = x(nMT_a) = x(nM) \quad 2.11$$

Observe que, para o sinal re-amostrado, o novo período de amostragem é  $MT_a$ . Fica claro que esta operação pode resultar em *aliasing* (superposição espectral).

Calculando a transformada do sinal re-amostrado  $x_d(t) = x(nMT_a)$  tem-se que:

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{MT_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\Omega - k \frac{\Omega_a}{M}\right) \quad 2.12$$

Neste caso a nova frequência de amostragem é  $\Omega_a/M$ , que é menor do que  $\Omega_a$ . Assim, para se prevenir a superposição espectral o sinal  $x(n)$  deveria ser filtrado antes da conversão da amostragem.

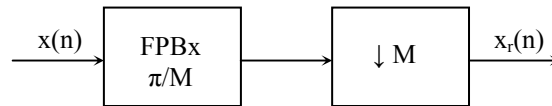
No domínio da frequência digital a transformada de Fourier de  $x_d(n) = x(nM)$ , admitindo que  $\Omega = w / MT_a$ , após alguma manipulação matemática pode ser mostrada que:

$$X_d(e^{jw}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(w-2\pi k)/M}) \quad 2.13$$

No caso contínuo, para se evitar a superposição espectral, o sinal  $x(t)$  deveria ser filtrado por um filtro passa-baixas com frequência de corte igual à metade da nova frequência de amostragem,  $\Omega_a/2M$ . Como, em geral, já estamos trabalhando no tempo discreto, então filtramos o sinal discreto  $x(n)$  por um filtro digital passa-baixas com ganho unitário e frequência de corte digital, tal que,

$$w_c = \frac{\Omega_a}{2M} T_a = \frac{\pi}{M} \quad 2.14$$

O processo de filtragem digital seguido da redução da amostragem é chamado de um decimador e é ilustrado pelo diagrama de blocos na figura 2.6. Assim, no processo de redução da taxa de amostragem por um fator  $M$ , primeiramente a sequência é filtrada por um filtro digital com ganho unitário e frequência de corte igual a  $\pi/M$  e em seguida faz-se a operação descrita pela equação (2.11).



**Figura 2.6:** Decimador.

### Aumento na taxa de amostragem por um fator inteiro

Suponha que se quer aumentar a taxa de amostragem de uma sequência  $x(n)$ , amostrada com um período de  $T_a$  segundos, por um fator de  $L$ , em que  $L$  é um número inteiro. A nova sequência,  $x_i(n)$ , pode ser obtida a partir de  $x(n)$  através da seguinte transformação:

$$x_i(n) = x\left(n \frac{T_a}{L}\right) = x\left(\frac{n}{L}\right) \quad 2.15$$

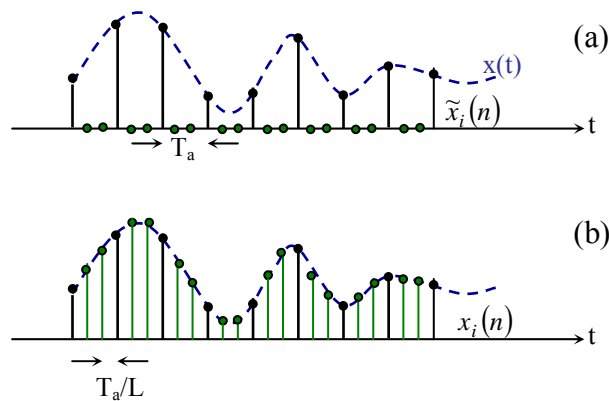
Observe que as amostras de  $x_i(m)$ , com índices múltiplos inteiros tais que  $m = nL$  de  $x(n)$ , são dadas por:

$$x_i(nL) = x(n) \tag{2.16}$$

Podemos concluir então que a equação (2.16) expande  $x(n)$  acrescentando  $L - 1$  zeros entre cada duas amostras adjacentes de  $x(n)$ , ou seja, temos uma nova sequência  $\tilde{x}_i(n)$  tal que:

$$\tilde{x}_i(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.17}$$

A figura 2.7.a, mostrada abaixo, ilustra esta operação.



**Figura 2.7:** Interpolação no domínio do tempo.

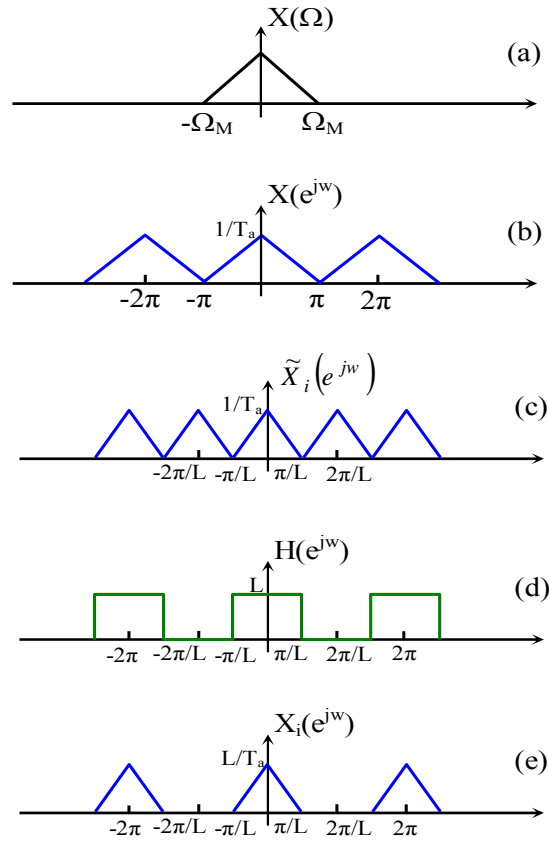
Calculando a transformada de Fourier da sequência  $\tilde{x}_i(n)$  da equação (2.17) tem-se que,

$$\tilde{X}_i(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_i(n) e^{-jnw} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jnLw}$$

portanto,

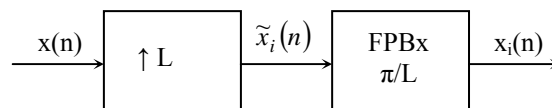
$$\tilde{X}_i(e^{jw}) = X(e^{jLw}) \tag{2.18}$$

Observe que  $\tilde{X}_i(e^{jw})$  é uma versão de  $X(e^{jw})$ , comprimida por um fator de escala  $L$ . Estas duas transformadas estão ilustradas na figura 2.8b e 2.8c. Observando esta figura podemos concluir que para se obter  $x_i(n)$  basta criar uma sequência como a da equação (2.17) e em seguida filtrá-la com um filtro passa-baixas digital com ganho  $L$  e corte em  $w_c = \pi/L$ . O uso do ganho  $L$  pode ser justificado notando que, como estamos comprimindo o sinal no domínio da frequência por um fator  $L$  e eliminando as componentes de frequência entre  $\pi/L$  e  $2\pi - \pi/L$ , a energia do sinal diminuirá por um fator igual a  $L^2$ . Assim, estabelecendo o ganho do filtro interpolador igual a  $L$  a energia do sinal interpolado é mantida igual à do original. O sinal interpolado no domínio do tempo é mostrado na figura 2.7.b.



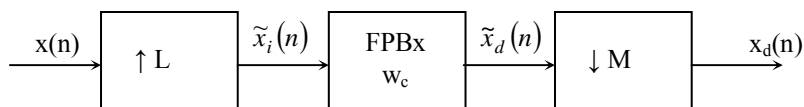
**Figura 2.8:** Processo aumento de aumento da taxa de amostragem. (a) espectro do sinal origina; (b) espectro do sinal amostrado  $x(n)$ ; (c) espectro de  $\tilde{x}_i(n)$ ; (d) filtro de interpolação; (e) espectro de  $x_i(n)$ .

O processo de aumento na taxa de amostragem de uma sequência é chamado de interpolador, e é ilustrado pelo diagrama de blocos da figura 2.9.



**Figura 2.9:** Interpolador.

Podemos ainda converter a taxa de amostragem por um fator racional de valor  $L/M$ , através da interconexão em cascata de um interpolador em seguida de um decimador, como mostra a figura 2.10 (Hayes, [14]).



**Figura 2.10:** Conversão por um fator racional.



Neste caso o filtro passa-baixas, na figura 2.10, deverá apresentar um ganho igual a  $L$ . Por causa de que nos processos de decimação e interpolação tem-se dois filtros passa-baixas, estes dois são substituídos por um único filtro com frequência de corte abaixo:

$$w_c = \min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right) \quad 2.18$$

Na conversão da taxa de amostragem por um fator racional devemos ressaltar que primeiramente de ser executada a operação de interpolação e após a filtragem executa-se a operação de decimação para se preservar o espectro de frequências da sequência.

**Exemplo 1:** Desejamos converter um sinal de áudio amostrado em 44.1 kHz (frequência para CD) em um sinal com frequência de amostragem de 48 kHz (frequência para *DAT digital áudio tape*), utilizando o esquema da figura 2.10. Determine os fatores de conversão  $L$  e  $M$  e a frequência de corte do filtro passa-baixas.

$$- \quad \frac{L}{M} = \frac{48000}{44100} = \frac{160}{147} \Rightarrow L = 160 \text{ e } M = 147$$

Portanto o filtro terá os seguintes parâmetros:

$$- \quad \text{ganho: } L = 160$$

$$- \quad \text{frequência de corte: } w_c = \min\left(\frac{\pi}{160}, \frac{\pi}{147}\right) = \frac{\pi}{160}$$

### Exercícios

1. Enuncie e demonstre o teorema da amostragem.
2. Seja  $\Omega_a$  a taxa de Nyquist para um sinal  $x(t)$ . Determine a taxa de Nyquist para os seguintes sinais formados a partir de  $x(t)$ . Utilize as propriedades da transformada de Fourier para sinais de tempo contínuo.
  - a)  $y(t) = 4x(t)$
  - b)  $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ ,
  - c)  $y(t) = x(4t)$ ,
  - d)  $y(t) = x^2(t)$
3. Um sinal de eletrocardiograma (ECG) analógico contém frequências úteis até 100 Hz. Qual a taxa de Nyquist para este sinal? Suponha que a taxa de amostragem seja de 250 Hz, qual a maior frequência que pode ser representada unicamente nesta taxa? Se o sinal acima fosse amostrado em 150 Hz, o que aconteceria?
4. Um sinal contínuo no tempo  $x(t)$  pode ser recuperado a partir de suas amostras  $x(nT_a)$  com  $T_a = 1$  ms. Qual é a maior frequência do sinal  $x(t)$ ?
5. Seja  $x(t) = \cos(500\pi t)$ .
  - a) Determine a sequência  $x(n)$  para uma frequência de amostragem igual a 1000 Hz.
  - b) Determine a sequência  $x(n)$  para uma frequência de amostragem igual a 200 Hz (resp:  $\cos(0.5\pi n)$ ).
  - c) A partir de  $x(n)$  do item b, determine o novo sinal no domínio do tempo contínuo utilizando frequência de amostragem de 200 Hz.
  - d) Explique o que ocorreu no item c.
6. Suponha que desejamos converter um sinal de voz amostrado 8 kHz (frequência para canais telefônicos) em um sinal com frequência de amostragem de 10 kHz, utilizando o esquema da figura 2.10. Determine os fatores de conversão L e M e a frequência de corte do filtro passa-baixas.

## Capítulo 3

### TRANSFORMADA Z

#### 3.1 Introdução

A transformada  $z$  é uma ferramenta matemática importante para ser aplicada na análise e representação de sistemas lineares de tempo discreto e invariantes ao deslocamento (**SLDT**). Ela pode ser considerada como uma generalização da transformada de Fourier para sinais de tempo discreto e desempenha o mesmo papel que a transformada de Laplace tem na análise dos sistemas lineares de tempo contínuo. Em particular, a transformada  $z$  será utilizada para descrever um sistema SLDT através da sua função de transferência (ou função do sistema),  $H(z)$ . A resposta em frequência é prontamente determinada admitindo  $z = e^{j\omega}$  e a estabilidade e causalidade do sistema é verificada através do cálculo dos polos e zeros. A transformada  $z$  é também utilizada como uma ferramenta para se determinar o espectro de sinais discretos em conjunto com a transformada discreta de Fourier.

#### 3.2 Definição e convergência

Considere uma sequência infinita  $x(n)$ :  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . A transformada  $z$  desta sequência é definida pela seguinte série de potências:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.1)$$

Neste capítulo será utilizado como notação, letras maiúsculas para representar a transformada  $z$  de uma sequência e minúsculas para representar os sinais de tempo discreto.

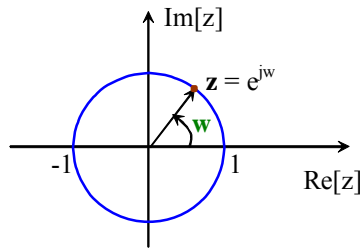
O operador  $z$  é uma variável complexa que pode assumir qualquer valor no plano  $z$ , onde a série dada pela equação (3.1) converge. Formalmente, em muitas situações, é mais usual e conveniente descrever esta variável na sua forma polar, representada por um módulo  $r$  e um ângulo de fase  $w$ , tal que:

$$z = re^{jw} \quad (3.2)$$

Admitindo  $z$  na forma polar é possível interpretar a transformada  $z$  no plano complexo da variável  $z$ , como mostra a figura 1. Neste plano é identificada uma região de contorno em tal que  $|z| = 1$ , isto é, um círculo de raio unitário onde se define, a estabilidade de sequências causais. Observe também que quando  $|z| = 1$  então  $r = 1$  e portanto  $z = e^{jw}$ . Substituindo  $z = e^{jw}$  na equação (3.1) tem-se que:

$$X(z = e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} \quad (3.3)$$

Assim, no círculo de raio unitário, a transformada  $z$  da sequência  $x(n)$  é a própria transformada discreta de Fourier.



**Figura 3.1:** Plano  $z$  e círculo de raio unitário.

Note que  $w$  é o ângulo de fase do vetor  $z$ , medido entre o eixo real e o ponto  $z$ . Como no círculo de raio unitário  $z = e^{jw}$ , calculando a transformada  $z$  neste círculo, partindo de  $z = 1$  ( $w = 0$ ) até  $z = -1$  ( $w = \pi$ ) obtém-se a transformada de Fourier de  $x(n)$ , para  $0 \leq w < \pi$ . Continuando o caminho em torno do círculo unitário chega-se novamente a  $z = 1$  ( $w = 2\pi$ ). A partir de  $2\pi$ , os cálculos se repetem. Esta reflexão mostra que a transformada de Fourier é periódica, com período  $2\pi$ , pois uma mudança equivalente a  $2\pi$  no ângulo  $w$  corresponde a percorrer uma volta inteira no círculo e chegada novamente ao ponto de partida.

### 3.2.1 Região de convergência

Desde que a transformada  $z$  é uma série infinita de potências, ela existirá somente para os valores de  $z$  aos quais ela converge. Assim, a região de convergência (que será abreviada por **RDC**) é definida para os valores de  $z$  para os quais  $X(z)$  é finita. Portanto, para que  $X(z)$  exista a seguinte desigualdade deve ser assegurada:

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right| < \infty \quad (3.4)$$

A região de convergência é muito importante e deve ser sempre indicada juntamente com a transformada  $z$ , como será visto nos exemplos que seguem.

**Exemplo 1:** Determine a transformada  $z$  e a correspondente região de convergência para as sequências finitas dadas abaixo. Nestes exemplos, o termo em negrito indica o índice de tempo zero ( $n = 0$ ).

a)  $x(n) = \{\mathbf{1}, 3, 5, 7, 0, 1\}$

$$X(z) = 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

*RDC : todo plano  $z$  exceto  $z = 0$*

b)  $x(n) = \{1, 2, \mathbf{3}, 4, 5, 6, 7\}$

$$X(z) = z^2 + 2z + 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + 6z^{-3} + 7z^{-4}$$

*RDC : todo plano  $z$  exceto  $z = 0$  e  $z = \infty$*

c)  $x(n) = \delta(n + n_d) : n_d > 0$

$$X(z) = z^{n_d}$$

*RDC : todo plano  $z$  exceto  $z = \infty$ , pois  $n_d > 0$*

Com o auxílio dos exemplos acima podemos observar que para sequências finitas a transformada  $z$  apresenta uma região de convergência que engloba todo o plano  $z$ , exceto, possivelmente  $z = 0$  e/ou  $z = \infty$ .

$\infty$ . Observe também que cada expoente da variável  $z$  contém informação a respeito da localização temporal das amostras. Assim,  $z^{-k}$  é interpretado como um operador de deslocamento, isto é, um atraso de  $kT_a$  segundos (em que  $T_a$  é o período de amostragem). Na transformada  $z$ , cada elemento da sequência é equivalente à multiplicação da amostra por  $z^{-k}$ .

Para se determinar a região de convergência de uma sequência com duração infinita vamos considerar a variável  $z$  na sua forma polar. Através da definição de convergência dada pela equação (3.4) e substituindo  $z$  por  $re^{j\omega}$  tem-se que:

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n} \right| < \infty \quad (3.5)$$

Desenvolvendo a equação acima,

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \quad : \text{ pois } |e^{-j\omega n}| = 1$$

Desse modo, pode-se concluir que  $|X(z)|$  é finita se a sequência  $x(n)r^{-n}$  for absolutamente somável. Separando na somatória acima os índices positivos dos negativos, obtém-se:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}|$$

Fazendo uma mudança de variável tem-se:

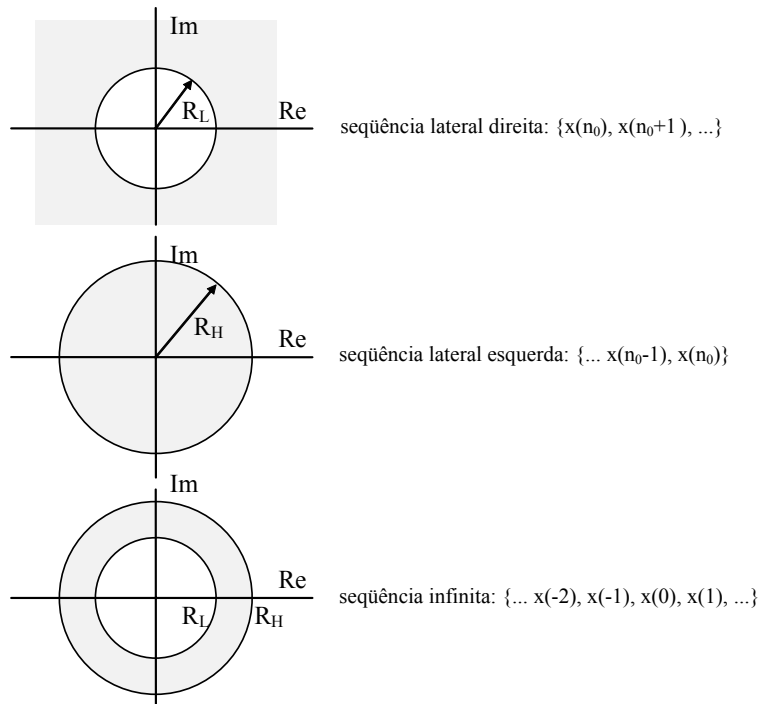
$$|X(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^{-n}| \quad (3.6)$$

O primeiro termo da equação (3.6) representa uma sequência lateral esquerda cuja região de convergência consiste do interior de um círculo de raio  $R_H$ , tal que  $R_H < \infty$ , por causa do termo  $r^n$ . Do mesmo modo, o segundo termo da equação acima representa uma sequência lateral direita cuja região de convergência é o exterior de um círculo de raio  $R_L > 0$ , em que  $R_L$  é o menor valor de  $r$  tal que  $x(n)r^{-n}$  seja absolutamente somável.

Consequentemente, a região de convergência da transformada  $z$  para uma sequência de tamanho infinito será uma região anular (um anel) dada pela intersecção das regiões de convergência das sequências lateral esquerda e direita, ou seja, ela será tal que:

$$R_L < |z| < R_H \quad (3.7)$$

Observe que para a transformada  $z$  existir  $R_H$  deverá ser maior que  $R_L$ . Caso  $R_H < R_L$  não existirá uma região de convergência comum às sequências lateral esquerda e direita, e portanto a transformada  $z$  da sequência não poderá ser definida. A figura 3.2, ilustra a região de convergência para sequências de duração infinita.



**Figura 3.2:** Região de convergência para seqüências de duração infinita.

**Exemplo 2:** Determine a transformada z e a região de convergência da seguinte seqüência:

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

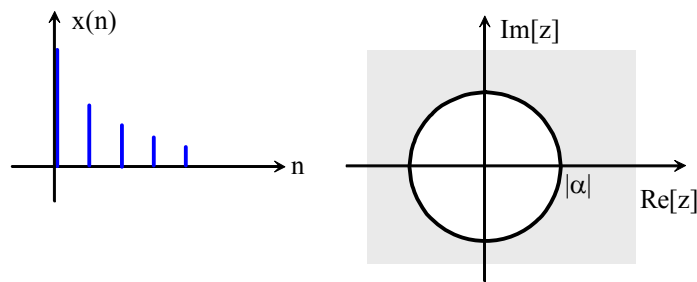
solução: utilizando a definição da transformada tem-se:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

Observe que a equação acima representa uma progressão geométrica com razão  $\alpha z^{-1}$ . Assim, admitindo  $|\alpha z^{-1}| < 1$ , a série converge e, portanto a RDC será  $|z| > |\alpha|$ ;

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad RDC : |z| > |\alpha|$$

A figura 3.3. mostra uma seqüência do tipo  $\alpha^n u(n)$  e a região de convergência da transformada z. Observe que se  $|\alpha| < 1$ , a RDC inclui o círculo unitário, apresentando, desse modo, a mesma transformada de Fourier do exemplo 16 do capítulo 1, como seria de se esperar.



**Figura 3.3:** Sequência  $\alpha^n u(n)$  e região de convergência.

Como será visto mais adiante, dois parâmetros importantes e muito utilizados na análise e na inversão das transformadas  $z$  são os seus zeros e os polos. Os zeros, como o próprio nome já diz, são os valores da variável  $z$  para os quais  $X(z) = 0$ , e os polos da transformada são os valores de  $z$  para os quais  $X(z) \rightarrow \infty$ . Portanto, pode-se concluir diretamente que a região de convergência para uma transformada  $z$  não pode incluir os seus polos.

O exemplo 2 ilustra esta conclusão. Observe que a transformada  $z$  apresenta um polo em  $z = \alpha$  e que a região de convergência obtida não inclui este polo pois  $|z| > |\alpha|$ .

**Exemplo 3:** Determine a transformada  $z$  e a região de convergência da seguinte sequência:

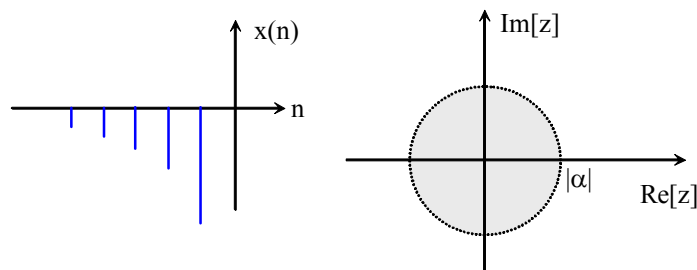
$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -\alpha^n, & n < 0 \end{cases}$$

solução:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^n$$

A equação acima é uma progressão geométrica com razão  $\alpha^{-1}z$ , assim, admitindo  $|\alpha^{-1}z| < 1$ , no qual a série converge, tem-se que:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad RDC : |z| < |\alpha|$$



**Figura 3.4:** Sequência  $-\alpha^n u(-n-1)$  e região de convergência.

Observe que a transformada  $z$  deste exemplo é a mesma do exemplo anterior, o que difere são as regiões de convergência das duas sequências, este fato mostra a importância de sempre se indicar a RDC junto com a transformada.

**Exemplo 4:** Determine a transformada z e a região de convergência da seguinte sequência:

$$x(n) = \alpha^n u(n) + \beta^n u(-n-1)$$

solução: aproveitando o resultado dos dois exemplos anteriores tem-se que:

- para o primeiro termo:

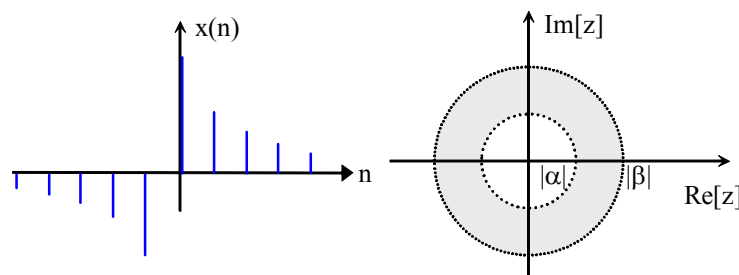
$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad RDC : |z| > |\alpha|$$

- para o segundo termo:

$$X_2(z) = \frac{-1}{1 - \beta z^{-1}} \quad RDC : |z| < |\beta|$$

Admitindo  $|\alpha| < |\beta|$  tem-se:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} - \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta - z - \alpha\beta z^{-1}} \quad RDC : |\alpha| < |z| < |\beta|$$



**Figura 3.5:** Sequência e região de convergência para o exemplo 4.

Observe que se  $|\alpha| > |\beta|$  não existe a transformada z desta sequência pois as duas regiões de convergência, dos exemplos 2 e 3, não se superpõem.

### 3.2.2 Propriedades da região de convergência

1. A região de convergência é um anel centrado na origem tal que:

$$0 \leq R_L < |z| < R_H \quad (3.8)$$

em que  $R_L$  e  $R_H$  são os raios menor e maior que delimitam a RDC.

2. A transformada de Fourier da sequência converge absolutamente se a região de convergência inclui o círculo de raio unitário, pois neste caso,  $z = e^{j\omega}$  pertence à RDC,
3. A região de convergência não contém polos.
4. Se a sequência tem duração finita então a RDC é todo o plano z, exceto possivelmente os pontos  $z = 0$  e/ou  $z = \infty$ .



5. Para seqüências lateral direita a RDC se estende a partir do polo mais exterior no plano  $z$  incluindo, possivelmente,  $z = \infty$ .
6. Para seqüências lateral esquerda a RDC se estende desde o ponto zero até o polo mais interior no plano  $z$ .
7. Para seqüências bilaterais infinitas a RDC é um anel que não contém polos.
8. A região de convergência é uma região conectada.

### 3.3 Transformada $z$ inversa

A análise de sistemas lineares envolve em geral encontrar a função de transferência do sistema e o cálculo da sua transformada  $z$  inversa (resposta à função amostra unitária). Existem diversos procedimentos para se encontrar a transformada  $z$  inversa, em particular, serão estudados neste capítulo os métodos pelo cálculo formal através do teorema da integral de Cauchy e teorema do resíduo, método por inspeção, expansão em frações parciais e expansão em série de potências.

#### 3.3.1 Método formal pela integral de contorno

A transformada  $z$  inversa é calculada pela seguinte equação:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (3.9)$$

em que  $C$  é uma região de contorno no sentido anti-horário e que engloba a origem.

A solução da equação acima é realizada pelo método dos resíduos, que fornece um modo simples de calcular a transformada inversa. Vale a pena provar o resultado da equação acima antes de apresentar o método do resíduo.

O teorema da integral de Cauchy estabelece que:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-k} dz = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Como visto no início deste capítulo, sabemos que a transformada  $z$  de uma seqüência  $x(n)$  é,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por  $\frac{1}{2\pi j} z^{k-1}$ , e integrando o resultado em uma região de contorno que engloba a origem e que pertence à região de convergência de  $X(z)$  tem-se que:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz$$

Trocando a ordem do somatório com a integral, pois as duas operações são lineares,

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{-n+k-1} dz$$

Pelo resultado da equação (3.10), a equação acima é válida somente quando  $k = n$ , então,

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{k-1} dz = x(k) \tag{3.11}$$

como queríamos demonstrar.

Se a região de convergência inclui o círculo de raio unitário, então podemos tomar como região de contorno este círculo no qual  $|z| = 1$ . Neste caso, substituindo  $z$  por  $e^{jw}$  na equação (3.9), a transformada  $z$  se reduz à transformada de Fourier da sequência e a região de contorno estará entre  $\pm \pi$ . Assim,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) e^{jwn} dw \tag{3.12}$$

A equação (3.9) raramente é utilizada, pois não é uma fórmula prática para inversão. Em engenharia elétrica podemos notar que maioria dos sinais e sistemas apresenta uma transformada  $z$  racional, isto é, uma razão dentre dois polinômios. Neste caso, os polos da transformada são facilmente determinados e a integral em (3.9) é calculada utilizando o teorema do resíduo. Este teorema fornece a seguinte fórmula para a inversão da transformada  $z$ ,

$$x(n) = \sum \left\{ \text{resíduos de } X(z)z^{n-1} \text{ para os pólos em } C \right\} \tag{3.13}$$

O teorema do resíduo de Cauchy estabelece que:

Seja  $G(z)$  uma função da variável complexa  $z$  e  $C$  uma região de contorno. Se a derivada  $dG(z)/dz$  existe na e dentro da região de contorno, e se  $G(z)$  não contém polos em  $z = p_0$ , então,

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{G(z)}{z - p_0} dz = \begin{cases} G(p_0), & \text{se } p_0 \text{ está dentro de } C \\ 0, & \text{se } p_0 \text{ está fora de } C \end{cases} \tag{3.14}$$

Generalizando este teorema temos: se a existe a derivada de ordem  $k + 1$  de  $G(z)$  e se  $G(z)$  não tem polos em  $z = p_0$ , então:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{G(z)}{(z - p_0)^k} dz = \begin{cases} \left. \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}G(z)}{dz^{k-1}} \right|_{z=p_0}, & \text{se } p_0 \text{ está dentro de } C \\ 0, & \text{se } p_0 \text{ está fora de } C \end{cases} \tag{3.15}$$

**Exemplo 5:** Determine a transformada  $z$  inversa de:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad : |z| > |\alpha|$$

- Multiplicando  $X(z)$  por  $z^{n-1}$  tem-se que:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{z^{n-1}}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z^n}{z - \alpha}$$

- Se  $n \geq 0$ , existe somente um polo de primeira ordem em  $z = \alpha$ . Assim calculando este residuo determina-se  $x(n)$ .

$$x(n) = \text{residuo de } X(z)z^{n-1} \text{ em } z = \alpha$$

$$= (z - \alpha) \frac{z^n}{z - \alpha} \Big|_{z=\alpha} = z^n \Big|_{z=\alpha} = \alpha^n$$

- Se  $n < 0$  então temos polos em  $z = 0$ . Calculando o residuo para  $n = -1$  tem-se:

$$x(n = -1) = \text{residuo de } X(z)z^{n-1} \text{ em } z = \alpha + \text{residuo em } z = 0$$

$$= z^{-1} \Big|_{z=\alpha} + z \frac{z^{-1}}{z - \alpha} \Big|_{z=0} = \alpha^{-1} - \alpha^{-1} = 0$$

Pode-se mostrar que  $x(n) = 0$  para todo  $n < 0$ . Assim,

$$x(n) = \alpha^n u(n)$$

### 3.3.2 Método por inspeção

Este é o método mais simples e direto para a obtenção da transformada  $z$  inversa. Ele consiste em reconhecer, por inspeção, um par (ou pares) conhecido de transformada  $z$ , ele envolve, em geral o uso de tabelas como a tabela 1, mostrada apos o exemplo 6.

**Exemplo 6:** Determine o sinal causal cuja transformada  $z$  é dada por:

$$X(z) = \frac{-1}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

- Como por hipótese o sinal é causal, então a RDC pertence à região  $|z| > r_H = 1$ . Comparando as transformadas da equação acima com a tabela 1 chega-se que:

$$x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2(1)^n u(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2u(n)$$

**Tabela 1:** Lista de transformadas  $z$  usuais.

| Sequência            | Transformada                  | RDC   |
|----------------------|-------------------------------|---|
| 1. $\delta(n)$       | 1                             | todo plano $z$  |
| 2. $u(n)$            | $\frac{1}{1 - z^{-1}}$        | $ z  > 1$   |
| 3. $-u(-n-1)$        | $\frac{1}{1 - z^{-1}}$        | $ z  < 1$   |
| 4. $\delta(n - n_d)$ | $z^{-n_d}$                    | todo plano $z$ exceto 0 (se $n_d > 0$ ) ou $\infty$ (se $n_d < 0$ ) |
| 5. $\alpha^n u(n)$   | $\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$ | $ z  >  \alpha $  |

---

|   |  |                  |
|---|--|------------------|
| 6. $-\alpha^n u(-n-1)$  | $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$                                      | $ z  <  \alpha $ |
| 7. $n\alpha^n u(n)$   | $\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$                      | $ z  >  \alpha $ |
| 8. $[\cos w_0 n]u(n)$   | $\frac{1-[\cos w_0 n]z^{-1}}{1-2[\cos w_0 n]z^{-1}+z^{-2}}$      | $ z  > 1$        |
| 9. $[\text{sen } w_0 n]u(n)$  | $\frac{[\text{sen } w_0 n]z^{-1}}{1-2[\cos w_0 n]z^{-1}+z^{-2}}$ | $ z  > 1$        |
| 10. $\begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & c. c. \end{cases}$ | $\frac{1-\alpha^N z^{-N}}{1-\alpha z^{-1}}$                      | $ z  > 0$        |

---

### 3.3.3 Método por expansão em frações parciais

Utiliza-se este método quando a transformada  $z$  é dada por uma razão de dois polinômios em  $z$  do tipo:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}. \quad (3.16)$$

Neste método o polinômio é decomposto em uma soma de polinômios de ordens menores (em geral de primeira ordem). Em seguida a sequência temporal de cada parcela é identificada por inspeção (Tabela 1) e a soma de todas as sequências obtidas é a transformada inversa de  $X(z)$ .

O procedimento para se obter uma expansão em frações parciais é primeiramente identificar os polos e zeros da função, e expressá-la como um produto de polinômios de primeira ordem, como abaixo:

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (3.17)$$

em que  $c_k$  são os zeros não nulos de  $X(z)$  e  $d_k$  são os polos não nulos.

Na solução por este método existem três possibilidades distintas que se deve considerar:

**Primeiro caso:** Admitindo  $M < N$  e todos os polos de primeira ordem. Neste caso  $X(z)$  pode ser expressa como:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad (3.18)$$

Os coeficientes  $A_k$  são determinados multiplicando ambos os lados da equação (3.18) por  $(1 - d_k z^{-1})$  e calculando o resultado para  $z = d_k$ . Assim,

$$A_k = \left( (1 - d_k z^{-1}) X(z) \right)_{z=d_k}. \quad (3.19)$$

**Segundo caso:** Admitindo  $M \geq N$  e todos os polos de primeira ordem. Neste caso um outro termo deve ser adicionado à equação (3.18). Neste caso  $X(z)$  é expressa como:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad (3.20)$$

Os coeficientes  $A_k$  são calculados como anteriormente pela equação (3.19) e os coeficientes  $B_k$  são obtidos através da divisão longa do numerador pelo denominador, na qual o resto da divisão apresenta um grau menor do que o denominador.

**Terceiro caso:** Admitindo  $M \geq N$  e um polo ( $d_j$ ) de ordem múltipla  $L > 1$ . Neste caso, a equação (3.20) é modificada como abaixo:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} B_k z^{-k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{l=1}^L \frac{C_l}{(1 - d_j z^{-1})^l} \quad (3.21)$$

Os coeficientes  $A_k$  e os  $B_k$  são calculados como anteriormente, e os  $C_l$  são calculados pela equação abaixo:

$$C_l = \frac{1}{(L-l)! (-d_j)^{L-l}} \left[ \frac{d^{L-l}}{dz^{L-l}} (1 - d_j z^{-1})^L X(z) \right]_{z=d_j} \quad (3.22)$$

Os termos da expansão do tipo  $B_k z^{-k}$  correspondem, no domínio do tempo, a impulsos deslocados para o instante ou índice  $k$ , isto é,

$$B_k \delta(n - k) \quad (3.23)$$

Os termos do tipo  $\frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$  correspondem às sequências do tipo:

$$(d_k)^n u(n) \quad \text{ou} \quad -(d_k)^n u(-n - 1) \quad (3.24)$$

A escolha do primeiro ou segundo termo na equação acima depende da região de convergência, como visto nos exemplos anteriores.

Os termos do tipo  $\frac{d_j z^{-1}}{(1 - d_j z^{-1})^2}$  correspondem à seguinte sequência

$$n d_j^n u(n) \quad : |z| > |d_j| \quad (3.25)$$

**Exemplo 7:** Determine a transformada z inversa de:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

- Como  $M = N = 2$ , tem-se que calcular  $B_0$  através da divisão longa de polinômios. Assim,

$$1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \left| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 1 + 2z^{-1} + z^{-2} \\ 2 - 3z^{-1} + z^{-2} \\ \hline -1 + 5z^{-1} \leftarrow \text{resto} \end{array} \right.$$

$$X(z) = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - z^{-1})} = 2 + \frac{A_1}{(1 - 0.5z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - z^{-1})}$$

- Cálculo dos  $A_k$

$$\left| \begin{array}{l} A_1 = (1 - 0.5z^{-1})X(z) \Big|_{z=0.5} = \frac{1 + 4 + 4}{1 - 2} = -9 \\ A_2 = (1 - z^{-1})X(z) \Big|_{z=1} = \frac{1 + 2 + 1}{1 - 0.5} = 8 \end{array} \right. \Rightarrow X(z) = 2 - \frac{9}{(1 - 0.5z^{-1})} + \frac{8}{(1 - z^{-1})}$$

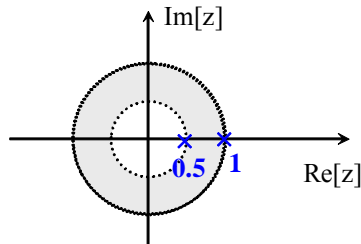


Figura 3.6: Localização dos polos de  $X(z)$ .

- Cálculo da transformada  $z$  inversa: Observe que  $X(z)$  é composto de três parcelas, cujas transformadas inversas foram calculadas nos exemplos anteriores. Como nada foi especificado a respeito da região de convergência, têm-se três regiões de convergência distintas para analisar, como mostra a figura 3.6. Para cada uma destas regiões tem-se uma sequência  $x(n)$ , isto é,

$$\left| \begin{array}{l} \text{se } |z| > 1 \Rightarrow \text{seqüência lateral direita} \\ x(n) = 2\delta(n) - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 8u(n) \\ \text{se } |z| < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{seqüência lateral esquerda} \\ x(n) = 2\delta(n) + 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) = 8u(-n-1) \\ \text{se } \frac{1}{2} < |z| < 1 \Rightarrow \text{seqüência bilateral} \\ x(n) = 2\delta(n) - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) = 8u(-n-1) \end{array} \right.$$

**Exemplo 8:** Determine a transformada  $z$  inversa da transformada abaixo. Admita  $x(n)$  uma sequência causal.

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

- cálculo dos polos de X(z)

$$1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} \\ p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} \end{cases}$$

- Como  $M < N$ , tem-se somente os coeficientes  $A_k$ . Fazendo a expansão em frações parciais,

$$X(z) = \frac{A_1}{(1 - p_1 z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - p_2 z^{-1})}$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1 + z^{-1}}{1 - p_2 z^{-1}} \Big|_{z = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{-j1.25} \\ A_2 = \frac{1 + z^{-1}}{1 - p_1 z^{-1}} \Big|_{z = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + j\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{j1.25} \end{cases} \Rightarrow X(z) = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2} e^{-j1.25}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} z^{-1}\right)} + \frac{\frac{\sqrt{10}}{2} e^{j1.25}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} z^{-1}\right)}$$

- Cálculo da transformada z inversa: Como a sequência x(n) é especificada no exercício como causal, então a região de convergência é para  $|z| > |p_i| = 1/\sqrt{2}$ . Assim,

$$x(n) = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{-j1.25} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} \right)^n u(n) + \frac{\sqrt{10}}{2} e^{j1.25} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4} \right)^n u(n)$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left\{ e^{j\left(\frac{\pi}{4}n - 1.25\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{4}n - 1.25\right)} \right\}$$

$$x(n) = \sqrt{10} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.25\right) u(n)$$

### 3.3.4 Método por expansão em série de potências

Neste caso o cálculo da transformada z inversa se resume em encontrar uma série do tipo:

$$X(z) = \dots x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (3.26)$$

em que os coeficientes das potências de z representam a transformada inversa.

**Exemplo 9:** Determine a transformada z inversa de:

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}) \quad : |z| > |a|$$

- calculando a série de potências de uma função do tipo  $\ln(1 + x)$ , onde  $|x| < 1$ , tem-se:

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(az^{-1})^n}{n} \quad \text{assim,}$$

$$x(n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n}$$

### 3.3.5 Método pela divisão longa

Como anteriormente este método é aplicado quando a transformada z é dada por uma razão de dois polinômios, N(z) no numerador e Q(z) no denominador. O coeficiente encontrado na divisão para  $z^{-n}$  é o valor de x(n) da sequência. Deve-se ter uma atenção especial quando se aplica este método de inversão, pois o modo como se faz a divisão depende da região de convergência. Se a região de convergência é o exterior de um círculo, a sequência temporal resultante é lateral direita (causal) e os polinômios devem ser arranjados em ordem decrescente de potências negativas da variável z. Se a região de convergência é o interior de um círculo, a sequência correspondente é lateral esquerda (não causal) e os polinômios devem ser arranjados em ordem crescente de potências positivas de z. Este método é muito simples e eficiente para se obter a transformada z inversa, ele será melhor compreendido através dos exemplos mostrados abaixo. Como desvantagem que podemos citar é que o resultado não é obtido em uma forma compacta.

**Exemplo 10:** Determine a sequência x(n) relativa à transformada z dada abaixo:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad RDC : |z| > |\alpha|$$

- Como  $|z| > |\alpha|$  tem-se uma sequência causal, assim:

$$\begin{array}{r|l}
 1 - \alpha z^{-1} & \begin{array}{l} 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \dots \\ 1 \leftarrow N(z) \\ 1 - \alpha z^{-1} \\ \hline \alpha z^{-1} \\ \alpha z^{-1} - \alpha^2 z^{-2} \\ \hline \alpha^2 z^{-2} \end{array} \\
 \hline
 & \Rightarrow x(n) = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots\}
 \end{array}$$

$$x(n) = \alpha^n u(n)$$

**Exemplo 11:** Determine a sequência x(n) relativa à transformada z dada abaixo:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad RDC : |z| < |\alpha|$$



- Como  $|z| < |\alpha|$  tem-se uma sequência não causal, assim faz-se a divisão com os polinômios em potências positivas de  $z$ . Logo:

$$X(z) = \frac{z}{z - \alpha}$$

$$\begin{array}{r|l}
 -\alpha + z & -\alpha^{-1}z - \alpha^{-2}z^2 - \alpha^{-3}z^3 + \dots \\
 \hline
 z & \leftarrow N(z) \\
 z - \alpha^{-1}z^2 & \\
 \hline
 & \alpha^{-1}z^2 \\
 & \alpha^{-1}z^2 - \alpha^{-2}z^3 \\
 \hline
 & \alpha^{-2}z^3
 \end{array} \Rightarrow x(n) = \{\dots, -\alpha^{-2}, -\alpha^{-1}\}$$

- Assim, podemos facilmente mostrar que:

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$$

### 3.4 Propriedades da transformada $z$

As propriedades da transformada  $z$  são basicamente as mesmas da transformada de Fourier para sequências discretas, já estudadas no capítulo 1. Estas propriedades são resumidas abaixo para referência futura do leitor sem a preocupação em prová-las. Para aqueles interessados é sugerido fazer as provas destas propriedades, como exercício.

Nesta seção será utilizada a notação  $R_X$  para indicar a região de convergência da transformada,  $X(z)$ , da sequência  $x(n)$ .

#### 3.4.1 Linearidade

Se  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$  são duas sequências distintas, com transformadas  $X_1(z)$  e  $X_2(z)$  respectivamente, então:

$$\begin{aligned}
 ax_1(n) + bx_2(n) &\leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z) \\
 RDC : R_{X_1} \cap R_{X_2} &
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

em que  $a$  e  $b$  são constantes e  $R_{X_1}$  e  $R_{X_2}$  são as regiões de convergência de  $X_1(z)$  e  $X_2(z)$  respectivamente.

#### 3.4.2 Deslocamento no tempo

$$\begin{aligned}
 x(n - n_d) &\leftrightarrow z^{-n_d} X(z) \\
 RDC : R_X &\text{ exceto } z = 0 \text{ e/ ou } z = \infty
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

#### 3.4.3 Diferenciação de $X(z)$

$$\begin{aligned}
 nx(n) &\leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz} \\
 RDC : R_X &\text{ exceto } z = 0 \text{ e/ ou } z = \infty
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

### 3.4.4 Multiplicação por uma sequência exponencial

$$\begin{aligned} a^n x(n) &\leftrightarrow X(z/a) \\ RDC : |a|R_X \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.4.5 Complexo conjugado de uma sequência

$$\begin{aligned} x^*(n) &\leftrightarrow X^*(z^*) \\ RDC : R_X \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.4.6 Reversão no tempo

$$\begin{aligned} x(-n) &\leftrightarrow X(1/z) \\ RDC : 1/R_X \end{aligned} \quad (3.32)$$

### 3.4.7 Convolução de sequências

$$\begin{aligned} x(n) * y(n) &\leftrightarrow X(z)Y(z) \\ RDC : R_X \cap R_Y \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.4.8 Teorema do valor inicial

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3.34)$$

neste caso,  $x(n)$  é admitida ser uma sequência causal.

### 3.4.9 Teorema do valor final

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \quad (3.35)$$

### 3.4.10 Teorema da convolução complexa

Se  $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$  então:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X_1(v)X_2(z/v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X_1(z/v)X_2(z)v^{-1}dv \\ RDC : (R_{X_1}R_{X_2})_L < |z| < (R_{X_1}R_{X_2})_H \end{aligned} \quad (3.36)$$

Se  $C_1$  englobar o círculo unitário:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \quad (3.37)$$

### 3.4.11 Teorema de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X_1(v)X_2^*(1/v^*)v^{-1}dv \quad (3.38)$$

Se a região de convergência englobar o círculo unitário, a transformada de Fourier existe. Assim,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{jw})X_2^*(e^{jw})dw \quad (3.39)$$

Em particular, quando  $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$ , então:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{jw})|^2 dw \quad (3.40)$$

A equação (3.40) fornece a energia de  $x(n)$ , que pode ser calculada tanto no domínio do tempo, quanto no da frequência.

### 3.5 Aplicação em sistemas lineares

A transformada  $z$  é uma ferramenta matemática muito importante na análise dos sistemas lineares de tempo discreto e invariantes ao deslocamento (SLDI). Em particular, ela é utilizada para encontrar a resposta em frequência de um sistema e na determinação da causalidade e estabilidade.

#### 3.5.1 Representação de um sistema utilizando a transformada $z$

Como estudado no capítulo 1, sabe-se que para um sistema SLDI, o sinal de saída,  $y(n)$  é dado pela soma de convolução entre a resposta à função amostra unitária,  $h(n)$  e a sequência de entrada,  $x(n)$ , isto é,

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (3.41)$$

A partir da propriedade da convolução, obtém-se a relação entre as sequências de entrada e saída do sistema tal que:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (3.42)$$

em que  $X(z)$ ,  $Y(z)$  e  $H(z)$  são, respectivamente, as transformadas  $z$  das entrada, saída e resposta à função amostra unitária do sistema.  $H(z)$  é chamada de **função do sistema ou função de transferência**. Quando se quer fazer a análise do sistema no domínio da frequência basta estabelecer  $z = e^{jw}$ , e a resposta em frequência é prontamente obtida.

#### 3.5.2 Função do sistema a partir da equação de diferenças

Considere um sistema SLDI que é descrito por uma equação linear de diferenças com coeficientes constantes tal que:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (3.43)$$

em que  $a_k$  e  $b_k$  são coeficientes reais e constantes. **Em muitos casos é comum estabelecer  $a_0$  igual a 1.**

Calculando a transformada  $z$  de ambos os lados da equação acima, e utilizando as propriedades de linearidade e deslocamento no tempo tem-se que:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \Rightarrow Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

Desde que  $X(z)$  e  $Y(z)$  tenham uma região de convergência em comum (sobrepostas), então:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3.44)$$

Esta é a equação geral de um sistema SLDI, quando representado por uma equação de diferenças. O numerador contém os zeros e o denominador os polos da função de transferência. Como se está considerando somente coeficientes reais então, se alguma raiz do numerador ou denominador for complexa, o complexo conjugado será também uma raiz. Desse modo, os polos e zeros sempre irão ocorrer na forma de complexos conjugados.

Uma prática muito comum é escrever a equação (3.44) em uma forma fatorada, em termos dos seus polos e zeros. Assim,

$$H(z) = \frac{b_0 (1 - c_1 z^{-1})(1 - c_2 z^{-1}) \dots}{a_0 (1 - d_1 z^{-1})(1 - d_2 z^{-1}) \dots} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (3.45)$$

Cada fator  $(1 - c_k z^{-1})$  contribui com um zero em  $z = c_k$  e um polo em  $z = 0$ , e cada fator  $(1 - d_k z^{-1})$  contribui com um polo em  $z = d_k$  e um zero na origem.

**Exemplo 12:** Dado o sistema causal cuja equação de diferenças é dada por:

$$y(n) = 0.6y(n-1) + x(n),$$

determine,  $H(z)$ , os polos e zeros da função e desenhe os gráficos do módulo e fase de  $H(z)$ .

- cálculo de  $H(z)$ :

$$Y(z) = 0.6z^{-1}Y(z) + X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.6z^{-1}} \quad : |z| > 0.6$$

tem-se : um pólo em  $d_1 = 0.6$  e um zero na origem.

Observe que o polo está localizado dentro do círculo unitário, portanto  $H(z)$  converge para  $z = e^{j\omega}$ .

- cálculo da resposta em frequência

$$\text{admitindo } z = e^{j\omega} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.6e^{-j\omega}}$$

- Cálculo do módulo de  $H(e^{j\omega})$

$$|H(e^{jw})| = \sqrt{H(e^{jw})H^*(e^{jw})} = \sqrt{\frac{1}{1-0.6e^{-jw}} \cdot \frac{1}{1-0.6e^{jw}}} = \sqrt{\frac{1}{1.32-1.2\cos w}}$$

- cálculo da fase

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{1-0.6e^{-jw}} = \frac{1}{1-0.6e^{-jw}} \cdot \frac{1-0.6e^{jw}}{1-0.6e^{jw}} = \frac{1-0.6\cos w - j0.6\sin w}{1.36-1.2\cos w}$$

$$\angle H(e^{jw}) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}[H(e^{jw})]}{\text{Re}[H(e^{jw})]} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{-0.6\sin w}{1-0.6\cos w} \right\}$$

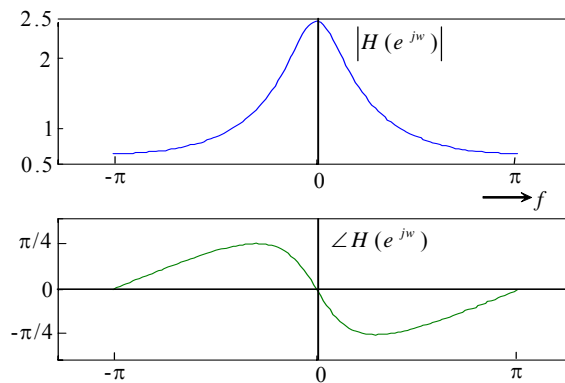


Figura 3.7: Módulo e fase de  $H(e^{jw})$

A equação (3.44) não indica a região de convergência de  $H(z)$ , pois a equação de diferenças não especifica unicamente  $h(n)$ . A estabilidade e causalidade do sistema dependerão da escolha apropriada da RDC, como será visto a seguir.

### 3.5.3 Estabilidade e causalidade

Desde que a RDC inclua o círculo unitário, então para  $z = e^{jw}$ ,  $H(z)$  se reduz à resposta em frequência do sistema. “Para os sistemas SLDI, a condição necessária e suficiente para que um sistema seja estável é que  $h(n)$  seja absolutamente somável”, ou seja,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \tag{3.46}$$

Esta condição implica que a RDC de  $H(z)$  inclua o círculo unitário pois:

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}|$$

Portanto, no círculo de raio unitário, onde  $|z| = 1$ , tem-se:

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \tag{3.47}$$

Assim, um sistema SLDI é **estável se a região de convergência inclui o círculo unitário**. Este resultado é algumas vezes chamado de teorema da estabilidade no domínio da transformada  $z$ .

Um sistema SLDI é denominado causal se a resposta à função amostra unitária satisfaz a seguinte condição:

$$h(n) = 0 \quad : n < 0 \quad (3.48)$$

Neste caso, como já visto anteriormente,  $h(n)$  é uma sequência lateral direita, indicando que a **RDC é o exterior de um círculo com raio definido pelo polo de  $H(z)$  mais afastado da origem.**

“Resumido, a estabilidade e causalidade de um sistema SLDI é verificada através da obtenção dos polos de sua função de transferência e checando se todos eles têm módulo menor do que 1”.

**Sistema estável:** A RDC é um anel que inclui o círculo de raio unitário e não contém polos.

**Sistema causal:** A RDC é o exterior de um círculo cujo raio contém o polo de maior módulo, sem incluí-lo.

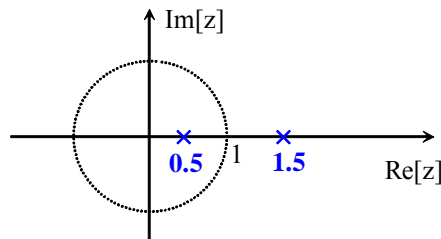
**Sistema estável e causal:** Todos os polos estão dentro do círculo de raio unitário.

**Exemplo 13:** Considerando o sistema abaixo, identifique cada uma das regiões onde ele é ou não estável e/ou causal e as correspondentes ao impulso.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2}}$$

- cálculo dos polos de  $H(z)$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}} \Rightarrow \text{polos : } \begin{matrix} p_1 = 1/2 \\ p_2 = 3/2 \end{matrix}$$



**Figura 3.8:** Localização dos polos de  $H(z)$ .

- O sistema é estável se:  $0.5 < |z| < 1.5$ . Assim, por inspeção,

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n-1).$$

- O sistema é causal se:  $|z| > 1.5$ . Assim,

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{3}{2}\right)^n u(n)$$

- O sistema é não causal (anti-causal) para  $|z| < 0.5$ . Assim,

$$h(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - \left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n-1)$$

Observe que, como o polo de maior módulo apresenta valor  $3/2 > 1$ , o sistema não apresenta uma RDC onde ele pode ser estável e causal simultaneamente.

**Exemplo 14:** Considere o sistema causal LDI com função de transferência mostrada abaixo tal que  $a$  é um número real.

$$H(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

a) Para que faixa valores de  $a$  o sistema é estável?

Como o sistema é causal, observando  $H(z)$  acima concluímos que o sistema é estável para  $|z| > a$ . Além disso, para que o sistema seja estável a RDC deve incluir o círculo unitário, assim:  $|a| < 1$ .

b) Encontre a resposta ao impulso do sistema.

Rescrevendo  $H(z)$  tem-se que:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad : |z| > a$$

$$h(n) = a^n u(n) - \frac{1}{a} a^{n-1} u(n-1)$$

c) Mostre que o sistema é um sistema (filtro) passa-tudo (ganho constante).

$$H(e^{jw}) = \frac{1 - a^{-1}e^{-jw}}{1 - ae^{-jw}} \Rightarrow |H(e^{jw})| = \sqrt{H(e^{jw})H^*(e^{jw})} = \sqrt{\frac{1 - a^{-1}e^{-jw}}{1 - ae^{-jw}} \cdot \frac{1 - a^{-1}e^{jw}}{1 - ae^{jw}}}$$

$$|H(e^{jw})| = \sqrt{\frac{1 + a^{-2} - 2a^{-1} \cos w}{1 + a^2 - 2a \cos w}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1 + a^2 - 2a^{-1} \cos w}{1 + a^2 - 2a \cos w}} = \frac{1}{a}$$

O módulo da resposta em frequência do sistema é constante e igual a  $1/a$ , assim o sistema é um sistema passa-tudo.

### 3.5.4 Obtenção da resposta em frequência a partir do gráfico de polos e zeros

Foi visto anteriormente que a função do sistema em termos de seus polos e zeros pode ser escrita da seguinte forma:

$$H(z) = \frac{(z - c_1)(z - c_2) \cdots (z - c_M)}{(z - d_1)(z - d_2) \cdots (z - d_N)} \quad (3.49)$$

em que  $c_i$  são os zeros de  $H(z)$  e  $d_i$  são os seus polos.

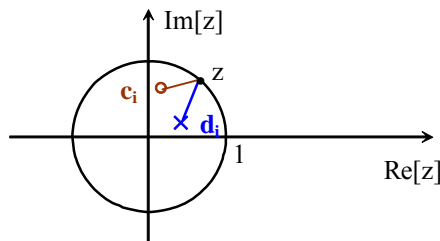
O módulo da função de transferência é dado por:

$$|H(z)| = \frac{|z - c_1| |z - c_2| \cdots |z - c_M|}{|z - d_1| |z - d_2| \cdots |z - d_N|} \quad (3.50)$$

Cada fator  $(z - c_i)$  ou  $(z - d_i)$  é um vetor cujo módulo é dado pela distância entre o ponto genérico  $z$  e o ponto particular determinado por  $c_i$  ou  $d_i$ .

Para calcular a resposta de amplitude do sistema estabelece-se  $z = e^{jw}$  e varia-se  $w$  entre  $\pm \pi$ , que corresponde às frequências  $\pm 0.5$ . Este procedimento corresponde a calcular  $H(z)$  no círculo unitário.

O efeito de cada polo ou zero na resposta de amplitude dependerá das suas posições no plano  $z$ . Para um polo, se ele está próximo do círculo de raio unitário o seu efeito será de uma resposta aguda ou bem pronunciada (picos), nas frequências próximas da frequência do polo, pois  $|z - d_i|$  é um valor pequeno. Por outro lado, se o polo está próximo de  $z = 0$ , ele acarretará pouco ou nenhum efeito na resposta em frequência, pois  $|z - d_i| \approx 1$ . O efeito dos zeros na resposta em amplitude é analisado de modo similar. Zeros próximos da origem apresentam pouco ou nenhum efeito na resposta de amplitude. No caso de eles estiverem próximos do círculo unitário, então nas frequências próximas do zero a resposta em frequência será pequena (apresentará um vale), pois  $|z - c_i|$  será um valor pequeno.



**Figura 3.9:** Efeito dos polos e zeros na função de transferência.



### Exercícios

1. Determine a transformada z das seguintes seqüências:

(a)  $x(n) = \{1, 2, 0, 0, 0, 5, 4, 3\}$

(b)  $x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

(c)  $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 5 \\ 0, & n < 5 \end{cases}$

2. Determine a transformada z das seqüências abaixo. Desenhe os respectivos diagrama de polos e zeros e indique a região de convergência.

(a)  $x(n) = \delta(n-2)$

(b)  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(c)  $x(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

(d)  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)$

(e)  $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)]$

(f)  $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(g)  $x(n) = (n+1)u(n)$

(h)  $x(n) = Ar^n \cos(w_0 n + \phi)u(n) \quad : 0 < r < 1$

3. A seqüência de autocorrelação  $c(n)$  de uma seqüência  $x(n)$  real é definida como:

$$c(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+k)$$

Determine a transformada z de  $c(n)$  em termos de  $X(z)$ .

4. Sendo  $X(z)$  a transformada z de  $x(n)$ , mostre que:

(a)  $x(n+M) \leftrightarrow z^M X(z)$

(b)  $a^n x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z)$

(c)  $nx(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$

5. Admitindo  $x(n)$  uma seqüência causal, mostre que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

6. Determine a transformada z das seguintes seqüências:

- (a)  $x(n) = a^{n-3}u(n-7)$   
 (b)  $x(n) = a^{|n|} \quad : |a| < 1$

7. Determine a transformada inversa de cada uma das transformadas  $z$  indicadas abaixo.

- (a)  $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$   
 (b)  $X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| < \frac{1}{2}$   
 (c)  $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$   
 (d)  $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$   
 (e)  $X(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$

8. Utilize o método da divisão longa para encontrar a transformada  $z$  inversa de:

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

Admita  $x(n)$  causal e depois anti-causal.

9. Determine a sequência causal cuja transformada  $z$  é dada por:

- (a)  $X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$   
 (b)  $X(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}$

10. Sendo  $x(n)$  um sinal autoregressivo AR(1) tal que:

$$X(z) = \frac{\sigma_0}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Mostre que a função de autocorrelação de  $x(n)$  é dada por:  $c(k) = \frac{\sigma_0^2}{1 - \alpha^2} \alpha^{|k|}$

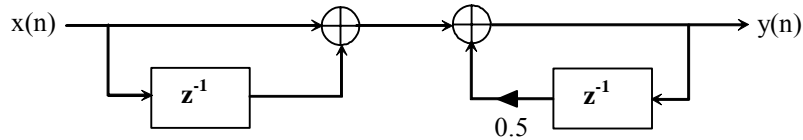
11. Um sistema LDI causal apresenta a seguinte função de transferência:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.25z^{-1})}$$

- (a) Qual a região de convergência de  $H(z)$ ?

- (b) O sistema é estável? Explique.  
 (c) Encontre a resposta ao impulso do sistema.

12. Para o sistema mostrado na figura abaixo encontre: A equação de diferenças que rege os sinais de entrada e saída, a função de transferência e a resposta ao impulso. Este sistema é estável? Explique.



13. Considere um sistema LDI causal descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y(n) + \frac{1}{2} y(n-1) = x(n)$$

- (a) Determine a resposta ao impulso do sistema.  
 (b) Encontre a resposta à função degrau unitário.

Em ambos os casos admita condições iniciais nulas.

14. Um sistema LDI é descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y(n) = \frac{1}{2} y(n-1) - \frac{1}{4} y(n-2) + x(n)$$

- (a) Encontre a função do sistema. Desenhe o diagrama de polos e zeros e indique a região de convergência.  
 (b) Determine a resposta ao impulso do sistema.  
 (c) Desenhe o módulo da função de transferência.

15. Um sistema LDI é descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y(n) = y(n-1) - y(n-2) + x(n-1)$$

- (a) Encontre a função do sistema. Desenhe o diagrama de polos e zeros.  
 (b) Determine a resposta ao impulso do sistema.

16. Sendo dados o par de transformada z abaixo. Pede-se:

$$\cos(w_0 n)u(n) \leftrightarrow \frac{1 - \cos(w_0)z^{-1}}{1 - 2 \cos(w_0)z^{-1} + z^{-2}} \quad |z| > 1$$

- a) Desenhe o diagrama de polos e zeros,  
 b) Determine a equação de diferenças do sistema,  
 c) Faça um programa, com saída gráfica, para gerar o sinal a partir da equação acima.
  - considere um sinal senoidal com frequência de 1 kHz e frequência de amostragem adequada
  - (utilize, por exemplo o matlab ou um outro software qualquer).

17. Sobre-amostragem (interpolação) é uma operação que alonga no tempo uma sequência pela inserção de zeros entre os seus valores, assim:

$$y(n) = \begin{cases} x(n/L) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sabendo que  $X(z)$  converge para  $\alpha < |z| < \beta$ , expresse  $Y(z)$  em termos de  $X(z)$  e determine a região de convergência de  $Y(z)$  em termos da região de  $X(z)$ .



## Capítulo 4

### Transformada Discreta de Fourier

#### 4.1 Introdução

Os métodos de análise de Fourier são muito utilizados em engenharia elétrica para converter sinais no domínio do tempo para o da frequência. No domínio da frequência, termos tais como, espectro de amplitude e espectro de fase são muito comuns de se encontrar, os seus cálculos facilitam a obtenção de informações, sobre os sinais, que não são aparentes no domínio do tempo.

Sabemos que quando trabalhamos com sinais contínuos no domínio do tempo utiliza-se a série ou a transformada de Fourier para a análise dos sinais. Elas são definidas como:

#### A Série de Fourier

Um sinal  $x(t)$  periódico, com período  $T$ , pode ser representado pela seguinte série de Fourier na forma exponencial,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j(2\pi k f_o t)} \quad (4.1)$$

em que:  $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j(2\pi k f_o t)} dt$  e  $f_o = \frac{1}{T}$  (4.2)

#### A Transformada de Fourier

A transformada de Fourier representa sinais não periódicos no domínio da frequência. Neste caso ela é definida como:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (4.3)$$

em que, o módulo de  $X(f)$  é chamado de espectro de amplitude do sinal  $x(t)$ , e a fase é chamada de espectro de fase de  $x(t)$ .

A relação inversa, que relaciona o sinal no domínio da frequência com o do tempo é chamada de transformada de Fourier inversa, e é definida pela seguinte relação:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad (4.4)$$

Com o avanço da tecnologia de circuitos integrados e o conseqüente avanço do desempenho e uso intensivo dos computadores pessoais, tanto em pesquisa quanto em desenvolvimento, tornou-se prático e eficiente utilizá-los na análise de Fourier. A transformada discreta de Fourier é particularmente aplicada em processamento digital de sinais, pois ela estende os conceitos do tempo contínuo para o tempo discreto, conduzindo a muitos algoritmos eficientes que podem ser implementados em computadores ou em processadores digitais.

Neste contexto, métodos de Fourier foram recentemente desenvolvidos para aplicação em sinais discretos no tempo. Eles incluem a transformada de Fourier para tempos discretos (TFTD) e a transformada discreta de Fourier (TDF). Elas nada mais são do que uma extensão dos conceitos da análise de Fourier para sinais contínuos no tempo.

Recordando, uma propriedade importante de um sinal discreto no tempo,  $x(n)$ , é que ele é definido somente para valores inteiros de  $n$ , na faixa  $-\infty < n < \infty$ . A relação entre os tempos contínuos e discretos é estabelecida pela amostragem uniforme nos sinais.

Sendo  $x(t)$  o sinal contínuo no tempo, então o sinal amostrado se transforma em uma sequência de números reais, definidos pelos valores de  $x(t)$  nos instantes de amostragem  $t = nT_a$ , isto é,

$$x(n) = x(t) \Big|_{t=nT_a}$$

em que  $T_a$  é o intervalo de amostragem.

Observe que  $x(t)$  e  $x(n)$  são modelos equivalentes do mesmo sinal nos domínios dos tempos contínuos e discretos, respectivamente. Para sinais contínuos no tempo utiliza-se a transformada de Fourier e para sinais discretos utiliza-se a transformada de Fourier para tempos discretos (TFTD), estudada no capítulo 1. Para sinais discretos e com duração finita, utilizamos a transformada discreta de Fourier que iremos estudar neste capítulo.

#### 4.2 Transformada de Fourier para tempos discretos

Recordando o capítulo 1, e a teoria da amostragem (capítulo 2), o par de transformadas de Fourier para tempo discreto (TFTD) pode ser definido pelas seguintes equações:

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{jwn} \quad (4.5)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw_d}) e^{jw_d n} dw_d \quad (4.6)$$

em que  $w = \Omega T_a$  é referida com frequência digital normalizada, e  $T_a$  é o período de amostragem.

O espectro  $X(e^{jw})$  é periódico, com período  $2\pi$ . Por causa desta propriedade a faixa usual de frequência para a representação dos sistemas discretos é  $-\pi < w \leq \pi$  ou então  $0 < w \leq 2\pi$ . Como os sinais de discreto são usualmente originados dos sinais de tempo contínuo é importante relembrar que a relação entre os seus espectros é dada por:

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{w}{T_a} - k \frac{2\pi}{T_a}\right) \quad (4.7)$$

em que  $2\pi/T_a = \Omega_a$  é a frequência de amostragem em radianos por segundo.

Note que o espectro do sinal amostrado consiste de um número infinito de réplicas do espectro do sinal contínuo, centradas nos múltiplos inteiros de  $\Omega_a$ . Estas réplicas são fiéis somente se o sinal contínuo for de banda limitada e que  $\Omega_a$  tenha valor suficientemente grande para elas não se superponham. Veja a figura 4.1. Se  $\Omega_M$  é a máxima componente de frequência do sinal, então, pelo teorema da amostragem, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$T_a \leq \frac{\Omega_M}{\pi} \tag{4.8}$$

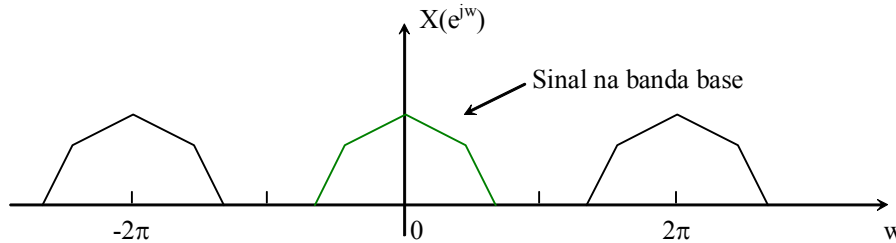


Figura 4.1: Amostragem de sinais.

### 4.3 Transformada Discreta de Fourier

A transformada discreta de Fourier considera que a sequência apresenta duração finita e a transformada é calculada no domínio da frequência discreta. Admitindo um sinal discreto no tempo  $x(n)$ , com duração finita igual a  $N$ , a TDF é definida como,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \tag{4.9}$$

em que:  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  (4.10)

Assim, a TDF é uma forma de mapeamento da sequência  $x(n)$  em uma outra sequência  $X(k)$  em que  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , e que representa um conjunto de frequências discretas  $w_k$  no intervalo 0 a  $2\pi$ .

$$x(n) \xleftrightarrow{TDF} X(k)$$

$$k \xrightarrow{\text{representa}} w_k = \frac{2\pi}{N} k$$

A quantidade  $W_N^k$  é periódica, com período  $N$ , e módulo igual a 1. Ela define pontos, regularmente espaçados no círculo de raio unitário do plano  $z$ , cujo valor de cada arco vale  $2\pi/N$  radianos, como mostra a figura 4.2. Observando esta figura, e sabendo que  $z = \exp(j\omega)$ , pode-se concluir também que a TDF é igual à transformada  $z$  calculada nos pontos discretos  $w = w_k$ , igualmente espaçados no círculo de raio unitário do plano  $z$ .

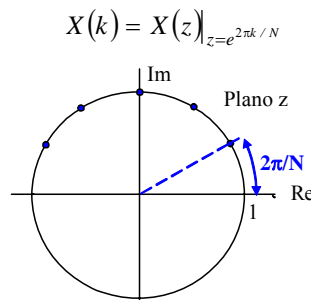


Figura 4.2: Relação da TDF com o plano  $z$ .

Estes pontos correspondem a incrementos de frequência digital de valor  $1/N$  (ou  $2\pi/N$ ). Assim o espectro  $X(k)$  é determinado nas frequências digitais::

$$w_k = \frac{2\pi}{N}k \quad \text{ou} \quad f_k = \frac{1}{N}k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.11)$$

No caso da frequência analógica, estes pontos correspondem a incrementos de valor  $F_a/N$ , sendo  $F_a$  a frequência de amostragem do sinal  $x(t)$  que gerou a sequência  $\{x(n)\}$ . Assim, o espectro  $X(k)$ , é determinado em pontos de frequências discretas dadas por:

$$F_k = \frac{F_a}{N}k \text{ [Hz]} \quad \text{ou} \quad \Omega_k = \frac{2\pi F_a}{N}k \text{ [rad/s]}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.12)$$

Uma observação importante sobre a TDF é que ela permite o cálculo do espectro a partir de dados discretos de duração finita, sem a necessidade de se utilizar uma expressão analítica para o sinal. Assim, ela é muito útil em aplicações práticas nas quais se tem um sinal proveniente de algum fenômeno físico ou biológico como sinais de voz, vídeo, sinais geofísicos. Tais sinais são convertidos em discretos por um conversor analógico digital, armazenados em um computador e em seguidas através de algoritmos de transformada rápida (FFT) calculamos o espectro do sinal.

A dificuldade que podemos encontrar é como o sinal deve ter tamanho finito, devemos escolher um trecho representativo daquele sinal. Outra dificuldade é que como trabalhamos com frequência discretas a resolução em frequência pode ser alta quando utilizamos baixa quantidade de amostras do sinal.

**Exemplo 1:** Um sinal de tempo discreto é dado pela seguinte sequência:

$$x(0) = 2; x(1) = 1; x(2) = 1; x(3) = 2;$$

Se  $x(n) = 0$  para todos os outros valores de  $n$ , determine a TDF  $X(k)$ .

Como  $N = 4$  então aplicando a equação (4.9) tem-se:

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)W_4^{nk} = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j\frac{\pi}{2}nk}$$

$$X(0) = 2e^{-j0} + 1e^{-j0} + 1e^{-j0} + 2e^{-j0} = 6$$

$$X(1) = 2e^{-j0} + 1e^{-j\frac{\pi}{2}1.1} + 1e^{-j\frac{\pi}{2}2.1} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}3.1} = 2 - j - 1 + j2 = 1 + j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$X(2) = 2e^{-j0} + 1e^{-j\frac{\pi}{2}1.2} + 1e^{-j\frac{\pi}{2}2.2} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}3.2} = 2 - 1 + 1 - 1 = 1$$

$$X(3) = 2e^{-j0} + 1e^{-j\frac{\pi}{2}1.3} + 1e^{-j\frac{\pi}{2}2.3} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}3.3} = 2 + j - 1 - j2 = 1 - j = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Assim,  $X(k)$  é a transformada discreta de Fourier da sequência  $x(n)$  calculada nas frequências digitais  $w_k = (\pi/2)k$ ,  $k = 0, 1, 2$  e  $3$ . Observe que a partir de  $k = 4$  a transformada se repete, isto é,  $X(4) = X(0)$ ,  $X(5) = X(1)$ , e assim por diante.

**Exemplo 2:** Determine a TDF da seguinte sequência:  $\{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$

O tamanho da sequência é  $N = 10$ . Aplicando a definição dada pela equação (4.9) tem-se que:



$$X(k) = \sum_{n=0}^9 x(n)W_{10}^{nk} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\frac{2\pi nk}{10}}$$

Conhecendo o resultado da série:  $\sum_{n=0}^{M-1} ar^n = \frac{a(1-r^M)}{1-r}$ .

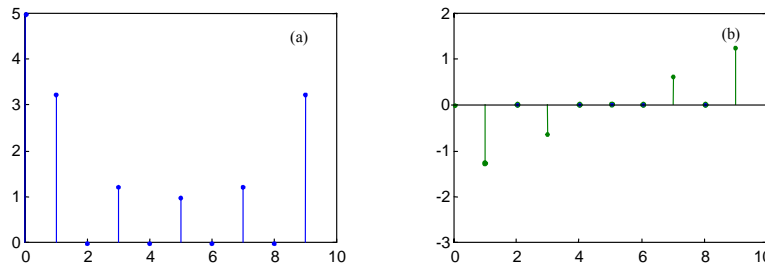
Então, por inspeção, estabelecendo  $a = 1$ ;  $r = e^{2\pi k / 10}$  e  $M = 5$  tem-se que:

$$X(k) = \frac{1 - e^{-j2\pi k / 2}}{1 - e^{-j2\pi k / 10}} = \frac{e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{e^{j\frac{\pi k}{10}}} \cdot \frac{e^{j\frac{\pi k}{2}} - e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{e^{j\frac{\pi k}{10}} - e^{-j\frac{\pi k}{10}}}$$

Utilizando as relações de Euler e desenvolvendo a equação acima se obtém,

$$X(k) = e^{-j\frac{2\pi k}{5}} \frac{\text{sen}(k\pi / 2)}{\text{sen}(k\pi / 10)}, \quad k = 0, 1, \dots, 9$$

Observe que os valores da TDF são complexos e apresentam simetria em torno do ponto  $N/2 = 5$ . O módulo apresenta simetria par e a fase apresenta simetria ímpar em torno desse ponto, veja figura 4.3. Cada índice  $k$  representa uma frequência digital de valor  $w_k = (2\pi/10)k$  ou  $f_k = k/10$ . Multiplicando estas frequências pela frequência de amostragem teremos as frequências correspondentes ao tempo contínuo.



**Figura 4.3:** TDF de  $x(n)$ , (a) Espectro de amplitude (módulo), (b) Espectro de fase.

#### 4.4 Transformada Discreta de Fourier Inversa

Dada a TDF  $X(k)$  de uma sequência  $\{x(n)\}$ , podemos calcular esta sequência calculando a transformada discreta de Fourier inversa (**TDFI**) através da seguinte equação:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \tag{4.13}$$

Note que, a não ser pelo sinal negativo do expoente e pela divisão por  $N$ , a equação acima é idêntica à equação (4.9).

#### 4.5 Propriedades da TDF

Algumas propriedades são muito usuais e importantes quando da aplicação da TDF em problemas reais. O conhecimento e a compreensão destas propriedades é de grande importância durante a análise dos resultados.

### 4.5.1 Periodicidade

Tanto a TDF, quanto a TDFI, produzem resultados periódicos, com período N. Este resultado é devido ao fato de que o termo  $W_N$  é periódico com período N.

$$x(n) = x(n + N) \rightarrow X(k) = X(k + N). \tag{4.14}$$

**Exemplo 3:** Determine a TDF do sinal

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right), \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

A TDF de N pontos do sinal  $x(n) = \cos(w_0 n)$  depende da frequência digital  $w_0 = 2\pi f_0$ . Dependendo de  $f_0$  ser uma função racional ou não e  $x(n)$  apresentar um ou mais períodos completos da função o espectro de frequência irá apresentar outras raiais diferentes daquelas posicionadas nas frequências  $\pi/8$  e  $2\pi N - \pi/8$ .

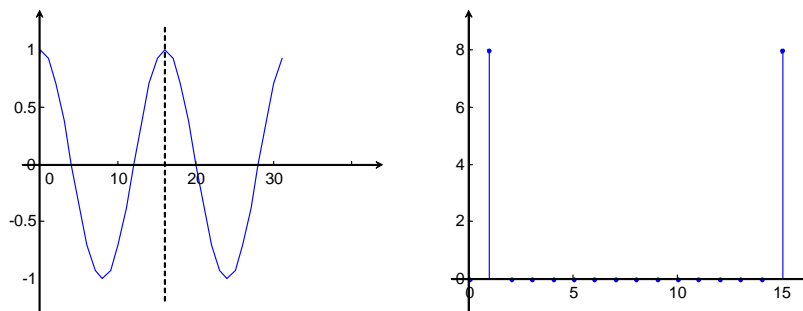
- Se  $w_0 = \frac{\pi}{8} \neq 2\pi \frac{k_0}{N}$ , em que  $k_0$  é um número inteiro positivo, teremos um número fracionado de períodos de  $x(n)$ . Assim:

$$X(k) = \frac{1}{2} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{N}k-w_0\right)} \frac{\text{sen}(\pi k - Nw_0 / 2)}{\text{sen}(\pi k / N - w_0 / 2)} + e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{N}k+w_0\right)} \frac{\text{sen}(\pi k + Nw_0 / 2)}{\text{sen}(\pi k / N + w_0 / 2)}$$

- Se  $w_0 = 2\pi \frac{k_0}{N}$ , em que  $k_0$  é um número inteiro positivo, teremos um número inteiro de períodos de  $x(n)$ , então,

$$X(k) = \begin{cases} N / 2, & k = k_0 \text{ e } k = N - k_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

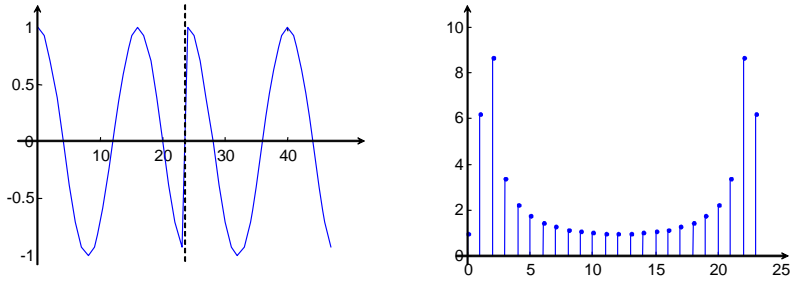
**Primeiro caso:** Seja  $N = 16 \Rightarrow$  tem-se exatamente um período da função  $x(n)$ .



**Figura 4.4.a:** TDF de  $x(n)$ ,  $N = 16$ .

Observe que neste caso, a TDF é calculada em exatamente um período do sinal senoidal, assim o espectro de amplitude apresenta somente duas raiais, uma na frequência  $k = 1$  e outra na frequência simétrica  $k = 15$  ( $16 - 1$ ), reproduzindo exatamente o espectro da função cosseno, isto é, raiais espectrais somente na frequência do sinal.

**Segundo caso:** seja  $N = 24 \Rightarrow$  tem-se um período e meio da função  $x(n)$ .



**Figura 4.4.b:** TDF de  $x(n)$ ,  $N = 24$ .

Observe, neste segundo caso, que a TDF admite que um período e meio do sinal senoidal se repete, e, portanto ela é não nula para todos os valores de  $k$ , enquanto que no primeiro caso ela é não nula somente para os valores de  $k$  que representam a localização da frequência do sinal.

Ambas as TDF acima são espectros de uma função cossenoidal, mas no segundo caso não dispomos de um número exato de períodos de  $x(n)$  e o espectro apresenta componentes não nulas nas frequências diferentes de  $\pi/8$  e  $2\pi N-\pi/8$ . Portanto deve-se tomar cuidado na interpretação dos resultados.

#### 4.5.2 Linearidade

$$TDF[a\{x(n)\} + b\{y(n)\}] = aX(k) + bY(k). \quad (4.15)$$

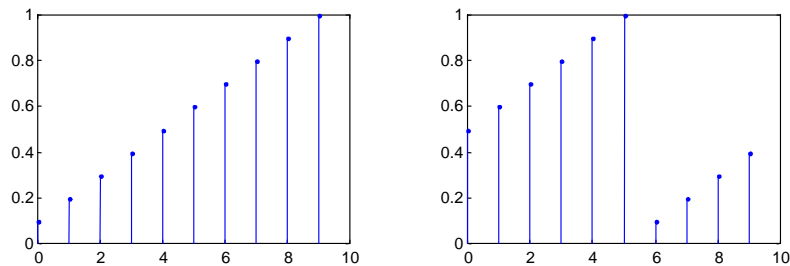
em que:  $X(k)$  e  $Y(k)$  são calculadas a partir de  $N$  amostras das sequências  $\{x(n)\}$  e  $\{y(n)\}$ , respectivamente.

É importante notar que  $x(n)$  e  $y(n)$  devem apresentar o mesmo comprimento  $N$ . Se elas apresentarem tamanhos diferentes, então se deve acrescentar zeros na sequência mais curta para que elas fiquem com o mesmo comprimento.

#### 4.5.3 Deslocamento circular em $x(n)$

Um deslocamento circular em uma sequência é ilustrado na figura 4.5. Ele representa uma rotação de  $M$  pontos na sequência dentro de um mesmo período. Neste caso a TDF apresenta uma componente de fase correspondente ao deslocamento. Sendo  $M$  o valor do deslocamento, então:

$$TDF[x(n + M)_c] = X(k)W_N^{-Mk}. \quad (4.16)$$



**Figura 4.5:** Deslocamento circular de uma sequência ( $M=6$ ).

#### 4.5.4 Deslocamento circular em X(k)

$$X(k + M) = TDF \left[ x(n) W_N^{Mn} \right]. \quad (4.17)$$

Esta propriedade define uma modulação do sinal, isto é a sequência do tempo discreto é multiplicada por uma exponencial complexa de frequência  $f_o = (F_o/N)M$ .

#### 4.5.5 TDF de Sequências Reais

A TDF de sequências reais produz uma sequência complexa cuja parte real é simétrica (par) e uma parte imaginária antissimétrica (impar) em torno da frequência  $N/2$  da TDF. De uma maneira mais simples, o módulo é par e a fase é ímpar em torno de  $N/2$ .

$$X(k) = X^*(N - k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.18)$$

**Exemplo 4:** Determine a TDF de  $x(n) = \text{sen}(2\pi fnT)$ , em que  $T_a = 1/F_a$ .

$$x(n) = \text{sen}(2\pi fn / F_a) = \frac{e^{j2\pi fn / F_a} - e^{-j2\pi fn / F_a}}{2j}$$

$$X(k) = \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi fn / F_a} W_N^{kn} - \frac{1}{2j} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi fn / F_a} W_N^{kn}$$

considerando  $f = mF_a/N$ , em que  $m < N/2$  (inteiro), então:

$$X(k) = \underbrace{\frac{1}{j2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(m-k) / N}}_{N, k=m} - \underbrace{\frac{1}{j2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n(m+k) / N}}_{N, k=N-m}$$

Portanto:

$$X(k) = \begin{cases} N / 2j, & k = m \\ -N / 2j, & k = N - m \\ 0, & c. c. \end{cases}$$

Observe que:  $|X(m)| = |X(-m)| = N/2$ , e  $\phi(m) = -\phi(-m) = \pi$ , isto é, o módulo de  $X(k)$  é uma função par e a fase é ímpar.

#### 4.5.6 Convolução Circular

Quando se trabalha com TDF os sinais, tanto no domínio do tempo como no da frequência, são admitidos periódicos, neste caso é definida a convolução circular.

A convolução circular entre duas sequências de mesmo comprimento ( $N$ ), é definida como,

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n - m) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n - m). \quad (4.19)$$

em que, a quantidade entre parêntesis ( $n-m$ ) é calculada via módulo  $N$  (deslocamento circular), desse modo  $y(n)$  também será periódica, com período  $N$ .

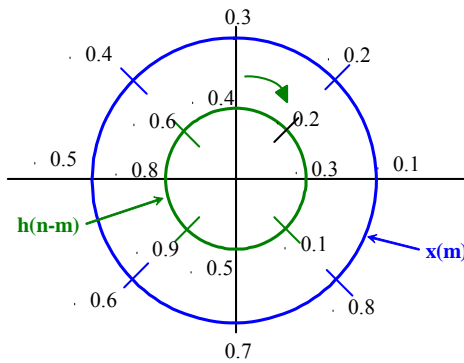
Neste caso, domínio da frequência, a TDF de  $y(n)$  será o produto das transformadas individuais de  $x(n)$  e  $h(n)$ , isto é,

$$Y(k) = X(k)H(k). \tag{4.19}$$

**Exemplo 5:** Considere duas seqüências  $x(n)$  e  $h(n)$ , mostradas na tabela abaixo.

| <b>n</b>    | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>6</b> | <b>7</b> |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>x(n)</b> | 0.1      | 0.2      | 0.3      | 0.4      | 0.5      | 0.6      | 0.7      | 0.8      |
| <b>h(n)</b> | 0.3      | 0.1      | 0.5      | 0.9      | 0.8      | 0.6      | 0.4      | 0.7      |

A convolução circular pode ser melhor compreendida com o auxílio da figura 4.6. No círculo interno são colocadas, no sentido horário, as amostras de um dos sinais, por exemplo  $h(n-m)$ , e no círculo externo são colocadas as amostras, no sentido anti-horário, do outro sinal ( $x(m)$ ). As amostras correspondentes ao mesmo raio são multiplicadas e os produtos resultantes são somados. Os outros valores da convolução são obtidos rotacionando o círculo interno no sentido horário. O processo é repetido até que a primeira amostra do círculo interno chegue a sua posição original.

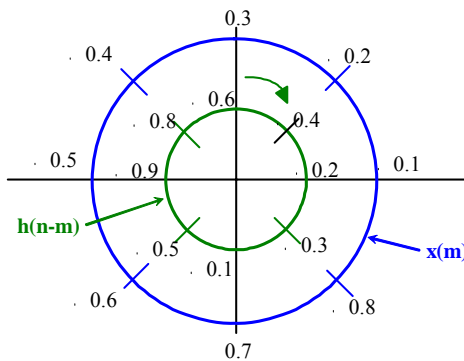


**Figura 4.6:** Ilustração da convolução circular ( $n = 0$ ).

Para  $n = 0$  tem-se que:

$$y(0) = 0.3 \times 0.1 + 0.1 \times 0.8 + 0.5 \times 0.7 + 0.9 \times 0.6 + 0.8 \times 0.5 + 0.6 \times 0.4 + 0.4 \times 0.3 + 0.2 \times 0.2$$

$$y(0) = 1.8$$



**Figura 4.7:** Ilustração da convolução circular ( $n = 1$ ).

Para  $n = 1$  (figura 4.7) tem-se que:

$$y(1) = 0.2 \times 0.1 + 0.3 \times 0.8 + 0.1 \times 0.7 + 0.5 \times 0.6 + 0.9 \times 0.5 + 0.8 \times 0.4 + 0.6 \times 0.3 + 0.4 \times 0.2$$

$$y(8) = 2.18$$

**Exemplo 6:** Determine a convolução circular entre  $x(n)$  e  $y(n)$  dadas abaixo:

$$x(n) = y(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < L-1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Vamos resolver o problema, utilizando o domínio da frequência.

- Estabelecendo  $N = L$ , após alguma manipulação algébrica pode-se mostrar que as transformadas discretas de Fourier das sequências acima serão dadas por:

$$X(k) = Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- Multiplicando  $X(k)$  por  $Y(k)$  tem-se:

$$Z(k) = X(k)Y(k) = \begin{cases} N^2, & k = 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- A transformada discreta de Fourier inversa da equação acima resultará na convolução circular  $x(n)*y(n)$ . Assim,

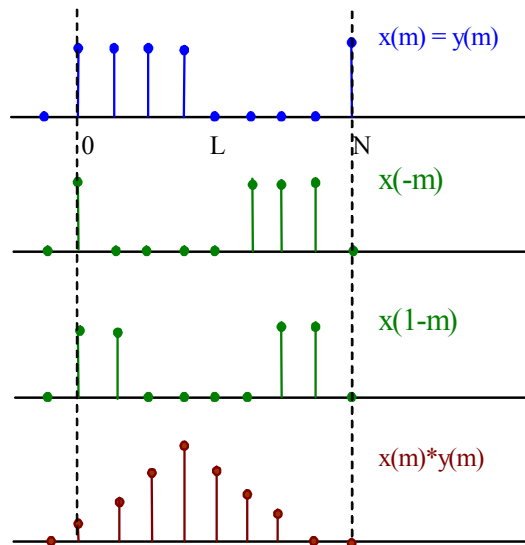
$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) W_N^{nk} = \frac{1}{N} Z(0) = N, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Fica claro que a sequência  $x(n-m)$  é rotacionada com relação a  $y(m)$ , mas a soma dos produtos será sempre igual a  $N$ , como mostra o resultado obtido acima. Fica também claro que o resultado acima não é a convolução linear entre  $x(n)$  e  $y(n)$ , mas sim, o que é chamado de convolução circular.

#### 4.5.7 Convolução Linear

Para se fazer a **convolução linear** entre duas sequências de comprimento diferentes, por exemplo  $N$  e  $M$ , cujo resultado é uma sequência de comprimento  $N+M-1$ , primeiramente se forma duas novas sequências de comprimento  $N+M-1$  acrescentando zeros nas anteriores e após esta operação se faz a convolução circular a partir destas novas sequências.

Assim, neste exemplo, mostrado acima, como os sinais têm o mesmo tamanho, devemos acrescentar  $L$  zeros nas duas sequências, de modo que ambas fiquem com comprimento  $2L$ . Em seguida, determinando a convolução circular tem-se como resultado a convolução linear entre as duas sequências originais. Este resultado é exemplificado na figura 4.8, mostrada abaixo.



**Figura 4.8:** Convolução Linear.

Em vez de se utilizar a equação (4.19), podemos utilizar a transformada discreta de Fourier para se obter a convolução linear entre duas sequências  $x(n)$  e  $y(n)$  de tamanhos  $N$  e  $M$ , respectivamente, como segue:

- Acrescente zeros nas duas sequências para que elas apresentem o mesmo tamanho  $L = N+M-1$ ,
- Calcule as TDFs das duas novas sequências,
- Multiplique as TDFs para formar o produto  $X(k).Y(k)$ ,
- Calcule a TDF inversa do produto acima para se obter a convolução linear entre  $x(n)$  e  $y(n)$ .

#### 4.6 Uso da DFT em análise espectral

Sabemos que a transformada de Fourier fornece o conteúdo de frequências de um sinal. Durante o cálculo, ela utiliza todo o intervalo de duração do sinal; se a duração é infinita, a integral ou então a soma de Fourier se estende até o infinito. Em contrapartida, para o cálculo da transformada discreta de Fourier necessitamos de um conjunto finito de dados. Assim, a TDF permite a representação no domínio da frequência de sinais do mundo real. Porém, justamente porque o conjunto de dados deve ser finito, a TDF faz somente uma aproximação do espectro do sinal.

Admitindo  $x(n)$  a sequência a ser analisada, o cálculo da DFT de  $N$  pontos é equivalente ao cálculo transformada de Fourier de  $x(n)$  multiplicada por uma função  $w(n)$  que vale um dentro do intervalo de análise e zero fora deste intervalo, isto é, calculamos a DFT da seguinte sequência:

$$\tilde{x}(n) = x(n)w(n) \tag{4.20}$$

Na qual a função  $w(n)$  é chamada de janela retangular tal que:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.21}$$

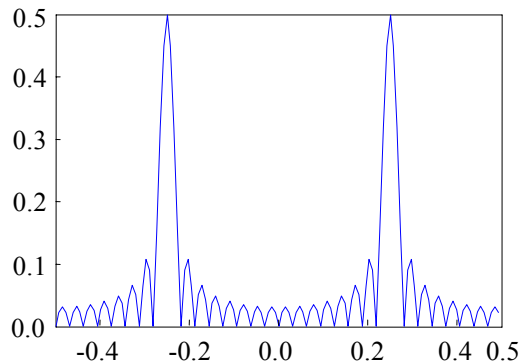
Desse modo, como se tem um produto de funções, o espectro observado da TDF será dado pela convolução circular entre o sinal real  $x(n)$  e a janela  $w(n)$ , assim,

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})W(e^{j\omega}) \tag{4.22}$$

em que: 
$$W(e^{j\omega}) = \frac{\text{sen}(\omega N / 2)}{\text{sen}(\omega / 2)} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$$

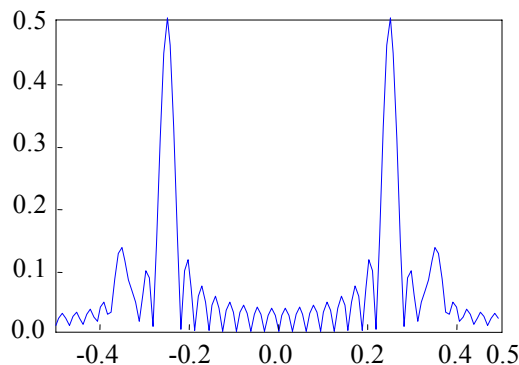
Assim, por causa da convolução, a janela apresenta o efeito de espalhar o espectro do sinal sobre toda a faixa de frequências observável, entre zero e a metade da frequência de amostragem, distorcendo o espectro real. Este resultado é melhor compreendido através de um exemplo, como mostraremos a seguir.

Para ilustrar este efeito considere o espectro de amplitude do sinal  $x(n) = \cos(2\pi 0.25n)$ , mostrado na figura 4.9. Este espectro foi obtido em um computador, utilizando 32 valores da sequência  $x(n)$  e acrescentado de 224 zeros, totalizando um total de 256 pontos. Os zeros foram acrescentados para melhorar a resolução gráfica da figura. Como o sinal é cossenoidal, seria esperado que o espectro estivesse concentrado em torno das frequências digitais de  $\pm 0.25$ , porém, por causa dos lóbulos laterais relativamente grandes da janela retangular (veja apêndice A1), o espectro está espalhado por toda a faixa de frequências entre  $\pm 0.5$ . Este fenômeno é conhecido como *leakage*. Para sinais com mais componentes de frequências este efeito pode mascarar algumas frequências do espectro.



**Figura 4.9:** Espectro de amplitude para o sinal  $x(n) = \cos(2\pi 0.25n)$ .

Na figura 4.10 é ilustrado o espectro de amplitude de um sinal com duas componentes cossenoidais, isto é,  $x(n) = \cos(2\pi 0.25n) + 0.25\cos(2\pi 0.35n)$ . Observe que por causa do efeito de espalhamento (*spectral leakage*), a componente de frequência digital igual a 0.35 e de menor amplitude praticamente não aparece no espectro. Se o sinal fosse desconhecido, seria muito difícil, ou praticamente impossível de identificar esta componente. Conseqüentemente, neste caso, a DFT não é uma boa aproximação do espectro do sinal.



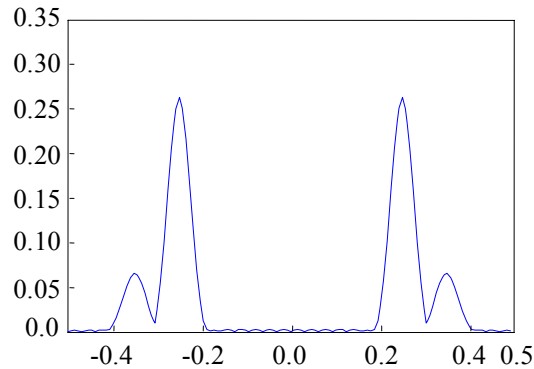
**Figura 4.10:** Espectro de amplitude para o sinal  $x(n) = \cos(2\pi 0.25n) + 0.25\cos(2\pi 0.35n)$ .

Uma explicação para esse efeito é a que segue: A janela retangular apresenta uma transição abrupta, este transiente causa no seu espectro de frequências grandes lóbulos laterais. A solução que dispomos para o problema é forçar a forma de onda da sequência tender a zero de maneira suave, sem transientes. Isto pode ser realizado utilizando uma função de janela diferente da retangular, como por exemplo, as



janelas de hamming ou de hanning (veja apêndice A1) para multiplicar o sinal. Janelas com transições mais suaves tendem a apresentar, no espectro de amplitude, lóbulos laterais bem menores do que os da retangular e lóbulo principal um pouco mais largo. Evidentemente que o uso de uma janela diferente da retangular modifica o sinal, porém, no domínio da frequência o sinal é melhor visualizado possibilitando uma melhor identificação das componentes de frequências do sinal. A figura 4.11 mostra o espectro de amplitude do sinal com duas componentes senoidais do exemplo anterior, multiplicado por uma janela de hamming, cuja equação é dada por:

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / N), & 0 \leq n < N \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.23)$$



**Figura 4.11:** Espectro de amplitude para o sinal  $x(n) = \cos(2\pi 0.25n) + 0.25\cos(2\pi 0.35n)$ , utilizando janela de hamming.

Como janela de hamming apresenta uma transição suave para o valor zero e, portanto lóbulos laterais pequenos, as duas componentes cossenoidais podem ser observadas, como mostra a figura 4.11. Conseqüentemente, utilizando janelas adequadas, a DFT pode se tornar uma boa aproximação do espectro do sinal. Uma dificuldade adicional que encontramos, quando do uso de janelas, é que a janela altera a potência total do sinal, modificando a amplitude dos espectros, como podemos observar também na figura 4.11. Uma solução para minimizar este efeito seria multiplicar a transformada do sinal pela soma dos valores  $w(n)$  da janela utilizada.

### Exercícios

1. Prove a seguinte relação: 
$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(r-k)n} = \begin{cases} N, & r = k \\ 0, & r \neq k \end{cases}$$
2. Calcule a TDF da sequência:  $x(0) = 2$ ;  $x(1) = 2$ ;  $x(2) = -2$  e  $x(3) = -2$ .
3. Calcule a TDF inversa, de N pontos ( $N = 10$ ) de:

$$X(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 2, & k = 3 \text{ e } 7 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

4. Um sinal analógico é amostrado em 10kHz e a TDF de 128 amostras é calculada. Determine o espaçamento de frequência entre as amostras espectrais.
5. Mostre que a resolução espectral de uma TDF de N amostras de um sinal é melhorada acrescentando zeros (por exemplo, M) à sequência original, e em seguida calculando a TDF de N+M pontos. Exemplifique.
6. Encontre a TDF das seguintes sequências. (Considere  $0 \leq n \leq N-1$  e k um valor inteiro de índice de frequência):
  - a)  $x(n) = \delta(n)$
  - b)  $x(n) = \delta(n - n_0)$ , onde  $0 < n_0 < N-1$
  - c)  $x(n) = a^n$ , onde  $a < 1$
  - d)  $x(n) = e^{j(2\pi\alpha/N)n}$
  - e)  $x(n) = \cos[(2\pi\alpha/N)n]$
  - f)  $x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases}$  OBS: faça  $N = 4, 8$  e  $16$ . Observe as diferenças
7. Exemplo no computador: Obter a TDF de  $x(n) = \cos(2\pi\alpha/N)n$ , onde  $N = 128$  e  $\alpha = 1; 1.5$  e  $2$ . Utilize um *software* tal como o MatLab para fazer este exercício.

## Capítulo 5

### Projeto de Filtros Digitais

#### 5.1 Introdução

Os filtros pertencem a uma classe muito importante de sistemas lineares invariantes no tempo, cuja função primária é selecionar, com pouca ou nenhuma atenuação, determinadas componentes de frequência e rejeitar ou remover todas as outras componentes de um sinal aplicado em sua entrada. Tais filtros são chamados de filtros seletivos em frequência. Eles são utilizados em aplicações tais como: redução de ruído, enriquecimento de sinais, equalizadores gráficos em sistemas de áudio, e em muitas outras aplicações de engenharia elétrica. Em um contexto mais amplo define-se um filtro como um dispositivo que modifica as componentes de frequência de um sinal aplicado em sua entrada.

Existem duas classes principais de filtros, os analógicos e os digitais. Os filtros analógicos utilizam componentes eletrônicos tais como resistores, capacitores, indutores e amplificadores operacionais para se construí-lo. Os filtros digitais utilizam um processador digital para realizar cálculos numéricos relativos à filtragem em um sinal amostrado. Sendo assim, além de incorporarem as vantagens do processamento digital, eles são facilmente projetados e implementados.

Neste capítulo serão descritas diversas técnicas de projeto dos filtros digitais, tanto para os filtros IIR (filtros com resposta ao impulso infinita) bem como para os FIR (filtros com resposta ao impulso finita). As técnicas, aqui apresentadas, são baseadas nos projetos clássicos de filtros analógicos, ou então na aproximação das suas características ideais. As características desejadas são especificadas pelas respostas de amplitude e de fase ou então, pela função de transferência e o projeto propriamente dito consiste em encontrar os coeficientes de um filtro IIR ou FIR que melhor aproximam as especificações desejadas.

Na prática os filtros FIR são empregados quando as especificações de projeto requerem um filtro com fase linear. Quando este requerimento não é necessário podem-se utilizar os filtros IIR. Os filtros IIR são preferidos em relação aos FIR, pois apresentam menores lóbulos laterais na banda de atenuação, e as características desejadas são obtidas com um número menor de parâmetros, reduzindo a complexidade computacional. Os filtros FIR, ao contrário, apresentam características completamente opostas aos IIR.

Neste capítulo, para facilidade de notação, representaremos a frequência angular analógica, dada em radianos por segundo, pela letra grega omega maiúscula ( $\Omega$ ) e a frequência em ciclos por segundo ou Hertz por (F). As frequências digitais serão representadas pelas letras minúsculas romanas  $w$  e  $f$ , respectivamente.

#### 5.2 Projeto de filtros digitais com resposta ao impulso infinita - IIR

Os filtros IIR são filtros recursivos, cuja saída no instante atual depende dos valores presente e passados da entrada e também dos valores passados da própria saída. Eles apresentam uma resposta ao impulso com duração infinita, e como consequência eles podem ser adaptados aos filtros analógicos que também, geralmente, apresentam resposta ao impulso com duração infinita. Assim, as técnicas principais de projeto dos filtros IIR consistem na obtenção de um filtro analógico, com determinadas especificações de projeto, em seguida, na transformação deste filtro em um digital. A transformação tenta preservar alguma característica ou representação do filtro analógico.

Existem três técnicas básicas para o projeto de filtros digitais com resposta ao impulso infinita: aproximação das derivadas da equação diferencial, invariância na resposta ao impulso e transformação bilinear, que é a mais popular. Estas técnicas são baseadas na transformação de um filtro de tempo contínuo em um filtro de tempo discreto, através de um mapeamento do plano  $s$  da transformada de Laplace para o plano  $z$ . A razão para este procedimento é que os projetos clássicos dos filtros analógicos

são bem conhecidos, padronizados e tabelados, além disso, famílias de filtros padrões, como por exemplo, os filtros de Butterworth, de Chebyshev e elípticos conduzem a projetos eficientes. Uma outra razão é que estes projetos conduzem a fórmulas muito simples de transformação do domínio do tempo contínuo para o discreto.

Um filtro analógico contínuo no tempo pode ser representado, no domínio da frequência, pela seguinte função do sistema:

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^N \alpha_k s^k} \quad (5.1)$$

em que:  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  são os coeficientes constantes do filtro, N é ordem do filtro, que corresponde ao maior grau do denominador, e s o operador de Laplace. O subscrito 'a' indica que o filtro é analógico.

A transformada de Laplace inversa da função do sistema fornece uma outra forma de representação de um filtro, isto é, a representação através da sua resposta ao impulso.

$$h_a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H_a(s) e^{st} ds \quad (5.2)$$

Uma outra forma alternativa para representar um filtro analógico é descrevê-lo através de uma equação linear diferencial com coeficientes constantes como mostrado abaixo:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M \beta_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad (5.3)$$

As três representações mostradas acima conduzem a três métodos diferentes de projeto de filtros digitais IIR, como será estudado em detalhes a seguir.

### 5.2.1 Método por aproximação das derivadas

Este procedimento consiste em aproximar a representação por equação diferencial linear dada pela equação (5.3), por uma equação de diferenças linear. Admitindo  $T_a$  o intervalo de amostragem, uma aproximação numérica para a derivada de primeira ordem é dada pela seguinte equação:

$$\left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=nT_a} = \frac{1}{T_a} [y(n) - y(n-1)] \quad (5.4)$$

A derivada de primeira ordem apresenta como função do sistema a seguinte transformada:

$$H(s) = s$$

A equação de diferenças da equação (5.4) tem como função do sistema a seguinte transformada z:

$$H(z) = \frac{1}{T_a} [1 - z^{-1}]$$

Então, o seguinte mapeamento do plano complexo s para o plano complexo z é realizado quando se faz a seguinte aproximação numérica:

$$s = \frac{1}{T_a} [1 - z^{-1}] \quad (5.5)$$

Para a derivada de segunda ordem pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right|_{t=nT_a} = \frac{1}{T_a} \left\{ \frac{y(n) - y(n-1)}{T_a} - \frac{y(n-1) - y(n-2)}{T_a} \right\} = \frac{1}{T_a^2} \{y(n) - 2y(n-1) + y(n-2)\}$$

e a equivalência no domínio da frequência será dada por:

$$s^2 = \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T_a} \right]^2 \quad (5.6)$$

Seguindo o procedimento acima, segue que a substituição para a derivada de k-ésima ordem será:

$$s^k = \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T_a} \right]^k \quad (5.7)$$

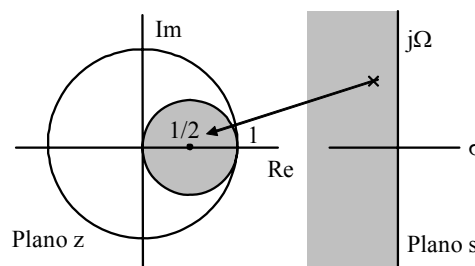
Portanto, a função de transferência para um filtro digital IIR que aproxima a função de transferência do filtro analógico através da aproximação numérica das derivadas é realizada através da seguinte transformação:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1}{T_a}(1 - z^{-1})} \quad (5.8)$$

As consequências desta transformação podem ser verificadas reescrevendo a equação (5.5) como segue:

$$z = \frac{1}{1 - sT_a} = \frac{1}{1 - j\Omega T_a} \Rightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega T_a)^2}} \quad (5.9)$$

Conforme  $\Omega$  varia de  $-\infty$  a  $\infty$  no plano  $s$ , a variável  $z$  é mapeada em um círculo de raio  $1/2$ , centrado no eixo real, em  $z = 1/2$ . Qualquer ponto no semiplano esquerdo do plano  $s$ , onde o filtro analógico é estável, é mapeado, no plano  $z$ , dentro do círculo de raio  $1/2$ , como mostra a figura 5.1.



**Figura 5.1:** Mapeamento de  $s$  no plano  $z$ .

Consequentemente, se  $H(s)$  for estável, esta transformação conduz a um filtro digital estável, pois todos os polos de  $H(z)$  estarão dentro do círculo de raio unitário, mais precisamente, dentro da circunferência hachurada na figura 5.1. Observe também que a localização dos polos de  $H(z)$  está confinada em uma área de frequências digitais baixas, de  $0$  a  $\pm \pi/2$ . Este fato, limita a utilização destes filtros para as características passa-baixas e passa-banda, com frequência de corte ou de ressonância baixa quando comparada com a frequência de amostragem. Não é possível projetar filtros passa-altas com esta técnica.

**Exemplo 1:** Converta o filtro passa-baixas com frequência de corte igual a 1 rad/s e com função de transferência mostrada abaixo, em um filtro digital IIR utilizando o método de aproximação das derivadas.

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

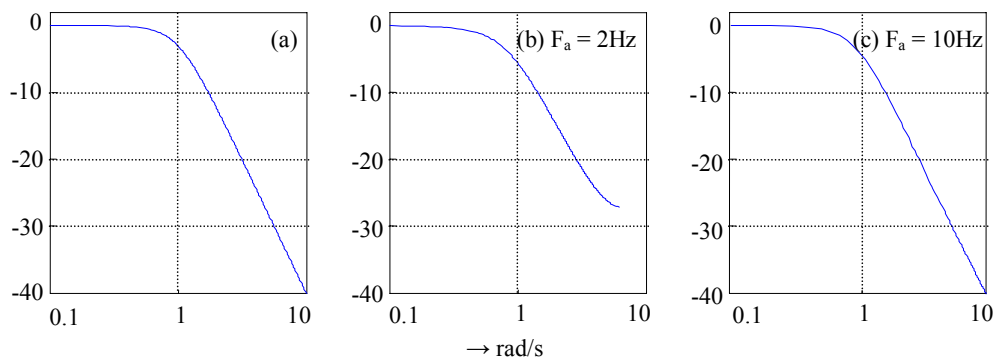
– Para a determinação de  $H(z)$  substitui-se, na equação acima,  $s$  por  $(1 - z^{-1})F_a$ . Assim:

$$H(z) = \frac{1/K}{1 - \frac{F_a(2F_a + \sqrt{2})}{K}z^{-1} + \frac{F_a^2}{K}z^{-2}} \quad \text{em que : } K = F_a^2 + \sqrt{2}F_a + 1$$

– Assim, os coeficientes do filtro digital em função de  $T_a$ , serão dados por:

$$b_0 = 1/K \quad a_0 = 1 \quad a_1 = -\frac{F_a(2F_a + \sqrt{2})}{K} \quad a_2 = \frac{F_a^2}{K}$$

Na figura 5.2 são mostrados espectros de amplitude dos filtros para frequências de amostragem de 2 Hz e 10 Hz. Observe que uma melhor aproximação para o filtro analógico ocorre para a frequência de amostragem maior ( $F_a = 10\text{Hz}$ ). Para frequências de amostragem grandes, os intervalos de amostragem são pequenos e as frequências digitais de interesse ficam concentradas em torno do eixo real, onde os círculos de raio  $\frac{1}{2}$  e unitário se tocam, assim neste intervalo melhor será a aproximação.



**Figura 5.2:** Projeto de filtros por aproximação das derivadas: (a) analógico; (b) digital; (c) digital.

### 5.2.2 Método por invariância da resposta ao impulso

Este método tem como objetivo a obtenção de um filtro IIR cuja resposta à amostra unitária,  $h(n)$ , seja uma versão amostrada da resposta ao impulso do filtro analógico que se quer aproximar. Para preservar a resposta ao impulso,  $h_a(t)$  é amostrada em intervalos regulares  $T_a$  de modo a se obter a resposta  $h(n)$  do filtro digital tal que:

$$h(n) = h_a(nT_a) = h_a(t)|_{t=nT_a} \quad (5.10)$$

Lembrando que a equação no domínio da frequência, que relaciona o espectro de frequências de um sinal amostrado a uma taxa  $F_a$  com o espectro do sinal analógico é dada por:

$$H(f) = F_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(f - k)F_a], \quad (5.11)$$

fica claro, pelo critério de Nyquist, que a resposta em frequência do filtro digital se aproxima do analógico, desde que a frequência de amostragem seja estabelecida suficientemente grande, de modo a minimizar o efeito da superposição espectral (*aliasing*). Conseqüentemente, este método é também limitado para os filtros passa-baixas e passa-banda, nos quais não existem oscilações na banda de atenuação. Ele é inadequado para o projeto de filtros passa-altas e rejeita banda a não ser que um filtro *antialiasing* seja utilizado.

Para mostrar o desenvolvimento do projeto de filtros por invariância da resposta ao impulso, considere um filtro analógico de ordem  $N$ , com  $N$  polos simples e distintos. Assim, a função de transferência na forma de frações parciais é dada por:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k} \quad (5.12)$$

em que:  $p_k$  são os polos do filtro analógico e  $A_k$  são os coeficientes da expansão em frações parciais.

A resposta ao impulso é determinada pela transformada de Laplace inversa da equação (5.12):

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} u(t) \quad (5.13)$$

Para preservar o formato da resposta ao impulso,  $h(t)$  é amostrada nos instantes  $t = nT_a$ . Assim,

$$h(n) = h_a(nT_a) = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k n T_a} u(n) \quad (5.14)$$

Calculando a transformada  $z$  de  $h(n)$  tem-se:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k n T_a} z^{-n} = \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{p_k T_a} z^{-1} \right)^n$$

portanto:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{p_k T_a} z^{-1}} \quad (5.15)$$

A função de transferência acima corresponde a um filtro digital que apresenta  $h(n) = h_a(nT_a)$  desde que não ocorra superposição espectral. Note na equação (5.15) que os polos,  $d_k$ , deste filtro são dados por:

$$d_k = e^{p_k T_a} \quad : k = 1, 2, \dots, N \quad (5.16)$$

As equações (5.15) e (5.16) fornecem um meio para se projetar filtros digitais pelo método de invariância ao impulso. Note que não é necessária a determinação de  $h_a(t)$  para o projeto, como se poderia pensar a princípio. Na realidade são necessários o conhecimento dos polos do protótipo analógico e a frequência de amostragem do sinal.

Com relação à estabilidade do filtro pode-se notar diretamente que se o filtro analógico de referência é estável, então os seus polos  $p_k = \sigma_k + j\Omega_k$  apresentam  $\sigma_k < 0$ . Neste caso, como:

$$|d_k| = e^{\sigma_k} < 1 \quad (5.17)$$

Assim, este método conduz a um filtro causal, estável, pois desde que os polos de  $H_a(s)$  estão localizados no semiplano esquerdo do plano  $s$ , então os polos de  $H(z)$  estarão localizados dentro do círculo de raio unitário.

**Exemplo 2:** Converta o filtro do exemplo 1, em um filtro digital pelo método de invariância ao impulso.

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

- Calculando os polos de  $H_a(s)$  e expandindo em frações parciais tem-se que:

$$H_a(s) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}j}{s + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}j}{s + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)}$$

- Polos de  $H_a(s)$  e de  $H(z)$ :

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j) \quad \Rightarrow \quad d_{1,2} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j)T_a}$$

- Cálculo de  $H(z)$ :

$$H(z) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}j}{1 - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j)T_a} z^{-1}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}j}{1 - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j)T_a} z^{-1}}$$

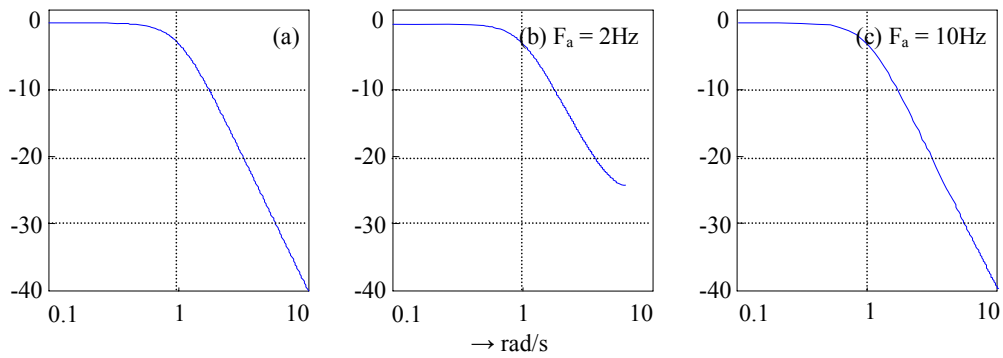
$$H(z) = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}T_a} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T_a\right) z^{-1}}{1 - 2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}T_a} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T_a\right) z^{-1} + e^{-\sqrt{2}T_a} z^{-2}}$$

- Assim, os coeficientes do filtro digital em função de  $F_a$  serão:

$$b_0 = 0 \quad b_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}/F_a} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}/F_a\right) \quad a_0 = 1 \quad a_1 = 2e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}/F_a} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}/F_a\right) \quad a_2 = e^{-\sqrt{2}/F_a}$$

- Para manter o ganho compatível com o analógico multiplicamos  $H(z)$  por  $T_a$ , ou seja, multiplicam-se todos os coeficientes  $b_k$  acima pelo período de amostragem.





**Figura 5.3:** Filtro digital por invariância ao impulso: (a) analógico; (b) digital; (c) digital.

Uma vantagem na utilização deste método é que as frequências  $\Omega$  e  $\omega$  são relacionadas linearmente, mas como o espectro de  $H(z)$  é o mesmo de  $H(s)$  só que se repete em múltiplos da frequência de amostragem alguma superposição de espectros é esperada e em alguns casos pode-se tornar intolerável.

### 5.2.3 Método por transformação bilinear

Este método é o melhor procedimento para se projetar filtros digitais a partir de um protótipo analógico. Ele supera as limitações dos anteriores, que são restritos aos filtros passa-baixas e passa-banda. Ele evita o problema da superposição espectral, enquanto mantém as principais características da função de transferência do filtro analógico. A transformação bilinear faz o mapeamento de todo o eixo  $-\infty < \Omega < \infty$  no círculo unitário  $-\pi < \omega < \pi$ , através da utilização da regra de integração numérica (regra do trapézio). O uso desta técnica é restrito às situações onde é aceitável distorção no eixo das frequências por causa da compressão de  $\Omega$  entre  $\pm\infty$  para  $\omega$  entre  $\pm\pi$ .

Considere um sistema de primeira ordem com função de transferência:

$$H_a(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{s+a} \quad (5.18)$$

A equação diferencial associada a este sistema é dada por:

$$\frac{d}{dt} y(t) + ay(t) = bx(t) \quad (5.19)$$

Sabe-se que a integral da derivada de  $y(t)$  fornece:

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(t) dt + y(t_0) \quad (5.20)$$

em que  $y'(t)$  é a derivada de  $y(t)$ .

Admitindo  $t = nT_a$  e  $t_0 = (n-1)T_a$  a integral é realizada em um intervalo correspondente a duas amostras consecutivas. Assim, aplicando a regra do trapézio na equação (5.20) tem-se que:

$$y(n) = \frac{T_a}{2} [y'(n) + y'(n-1)] + y(n-1) \quad (5.21)$$

Admitindo  $t = nT_a$  na equação (5.19) e substituindo na equação (5.21), acima, segue que:

$$\left[1 + \frac{aT_a}{2}\right]y(n) - \left[1 - \frac{aT_a}{2}\right]y(n-1) = \frac{bT_a}{2}[x(n) + x(n-1)] \quad (5.22)$$

A equação acima é uma aproximação numérica do sistema de primeira ordem mostrado em (5.18) e em (5.19). Assim, a transformada z da equação (5.22) fornece a função do sistema digital equivalente:

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T_a} \left[ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right] + a} \quad (5.23)$$

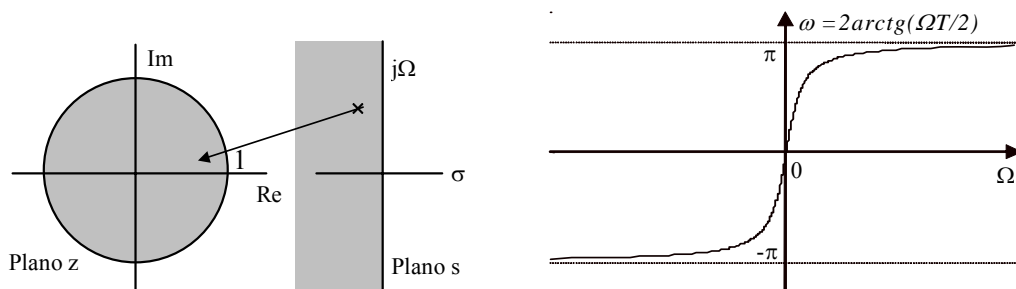
Comparando as equações 5.18) e (5.23) pode-se concluir que o mapeamento do plano s para o plano z pode ser feito pela seguinte relação:

$$s = \frac{2}{T_a} \left[ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right] \quad (5.24)$$

Assim, substituindo s pela relação acima em H(s) obtém-se o filtro digital equivalente pelo método da transformação bilinear.

Para verificar as consequências desta transformação, seja  $s = j\Omega$  e  $z = e^{jw}$ . Após alguma manipulação algébrica na equação (5.24) tem-se que:

$$\Omega = \frac{2}{T_a} \tan\left(\frac{w}{2}\right) \quad \text{ou} \quad w = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\Omega T_a}{2}\right) \quad (5.25)$$



**Figura 5.4:** Mapeamento para a transformação bilinear.

Observe que a faixa de frequências entre 0 e  $\infty$ , é mapeada entre 0 e  $\pi$ , no plano z, e a faixa  $-\infty < \Omega < 0$  é mapeada no círculo unitário tal que  $-\pi < w < 0$ .

A transformação bilinear evita o problema da superposição espectral encontrado nos outros dois métodos, pois o eixo  $j\Omega$  é mapeado inteiramente no círculo unitário do plano z, desse modo não há superposição espectral no domínio da frequência. Todo o semiplano esquerdo do plano s é mapeado dentro do círculo unitário o que indica que a transformação é estável. Contudo, este mapeamento é altamente não linear, devido à função tangente que relaciona  $\Omega$  com w na equação (5.25). Esta relação comprime o eixo  $j\Omega$ . Este tipo de compressão é chamado na literatura de *frequency warping* e deve, a princípio, ser tolerado quando da utilização deste método.

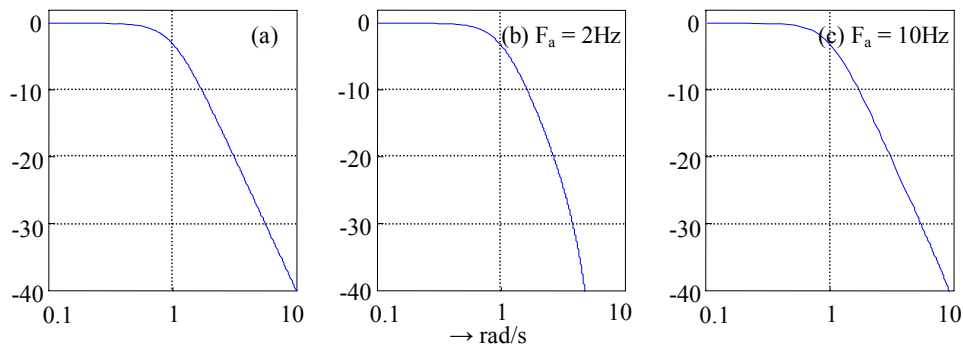
**Exemplo 3:** Converta o filtro do exemplo 1, em um filtro digital utilizando o método de transformação bilinear.

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

– substituindo  $s$  por  $2F_a \left[ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]$  tem-se que:

$$H(z) = \frac{(1 + 2z^{-1} + z^{-2})/k_1}{1 - \frac{8F_a^2 - 2}{k_1}z^{-1} + \frac{1 - 2\sqrt{2}F_a + 4F_a^2}{k_1}z^{-2}} \quad \text{em que: } k_1 = 1 + 2\sqrt{2}F_a + 4F_a^2$$

Na figura 5.4 são mostrados espectros de amplitude dos filtros para frequências de amostragem de 2 Hz e 10 Hz. Observe que há pouca diferença na aproximação do filtro analógico tanto para a frequência de amostragem de 2 Hz quanto para a de 10Hz, a não ser pela distorção no eixo de frequência. Existe uma compressão na resposta de amplitude do filtro digital. Uma das grandes vantagens na utilização deste método é não há restrição no tipo de filtro que será projetado, portanto este método é o mais utilizado na obtenção de filtros digitais IIR.



**Figura 5.4:** Filtro digital utilizando transformação bilinear: (a) analógico; (b) digital; (c) digital.

### 5.3 Família de respostas de filtros analógicos

A técnica mais comum de projeto de filtros IIR é a que transforma um protótipo analógico, previamente projetado, em um digital, utilizando um dos três métodos mostrados na seção anterior. Nesta seção serão estudados alguns procedimentos de projeto dos filtros analógicos, bem como algumas famílias de respostas de filtros analógicos muito empregadas na prática e que serão utilizadas como base nos projetos dos filtros digitais IIR. As famílias, aqui discutidas, são apresentadas para os protótipos passa-baixas, os outros tipos de filtros podem ser facilmente obtidos por transformação de frequências.

#### 5.3.1 Resposta de Butterworth

Sabendo-se que a característica de amplitude de um filtro ideal é plana na faixa de passagem, o filtro de Butterworth tenta aproximar esta característica através de uma função polinomial no domínio da frequência. Ele é caracterizado por uma resposta de amplitude que é maximamente plana na faixa de passagem (figura 5.5.a) e por uma resposta decrescente na banda de parada. O módulo ao quadrado da sua função de transferência é definido como:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{-s^2}{\Omega_c^2}\right)^N} \quad (5.26)$$

em que:  $\Omega_c$  é a frequência de corte do filtro (queda de 3 dB na banda de passagem) e  $N$  é a ordem do filtro.

Admitindo  $\Omega_n = \Omega/\Omega_c$  na equação (5.26), as seguintes propriedades podem ser observadas:

1.  $|H(0)| = 1$ , isto é, ganho igual 1 na faixa de passagem. Para um ganho diferente basta multiplicar (5.26) pelo ganho desejado.
2.  $|H(1)| = 0.707$ , frequência de corte igual a 1 rad/s, como consequência da normalização em frequência.
3. Expandindo  $|H(\Omega_n)|$  em série de Taylor tem-se que:

$$|H(j\Omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (\Omega_n)^{2N}}} = 1 - \frac{1}{2} \Omega_n^{2N} + \frac{3}{8} \Omega_n^{4N} - \dots$$

Desse modo, as derivadas de  $|H(\Omega_n)|$  para  $\Omega_n = 0$  serão:

$$\left. \frac{d^k}{d\Omega_n^k} |H(j\Omega_n)| \right|_{\Omega_n=0} = 0 \quad : k = 1, 2, \dots, 2N - 1$$

Todas as derivadas de ordem  $n = 1, 2, \dots, 2N-1$  são nulas em  $\Omega_n = 0$ , indicando que em torno deste valor a função é plana. Devido a esta propriedade o filtro de Butterworth é conhecido como filtro com resposta em amplitude maximamente plana.

4. Conforme a ordem do filtro aumenta, a resposta de amplitude torna-se mais plana na faixa de passagem e a taxa de atenuação na banda de transição torna-se mais acentuada, como pode ser observado na figura 5.5.a. Acima da frequência de corte, isto é, para  $\Omega_n \gg 1$  ou  $\Omega \gg \Omega_c$ , a função de transferência exibe uma taxa de atenuação correspondente a 20N dB por década (cada vez que se aumenta por 10 a frequência) ou 6N dB por oitava (cada vez que se dobra a frequência). Nesta situação a resposta assintótica será:

$$|H(j\Omega)| \approx \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^N}$$

Os polos da função de transferência são aqueles anulam o denominador da equação (5.26). Assim:

$$-\frac{s^2}{\Omega_c^2} = (-1)^{1/N} = e^{j(2k+1)\pi/N} \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

Consequentemente, os polos que permitem que a equação (5.26) seja estável serão:

$$p_k = \Omega_c e^{j\pi/2} e^{j(2k+1)\pi/2N} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (5.27)$$

A equação acima indica que estes polos estão localizados no semiplano esquerdo do plano  $s$  em pontos regularmente espaçados em um círculo de raio  $\Omega_c$  e são simétricos em relação ao eixo real, como mostra a figura 5.5b.

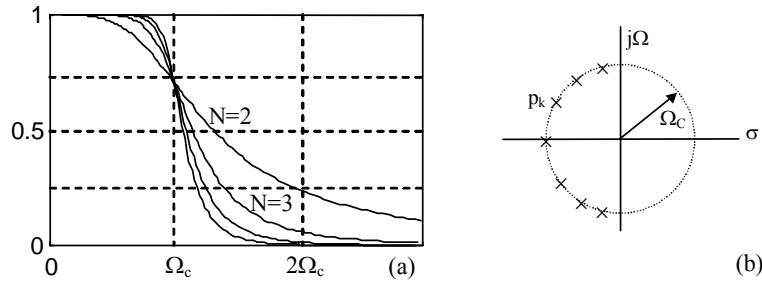


Figura 5.5: (a) Espectro de amplitude, (b) localização dos polos do filtro de Butterworth.

**Exemplo 4:** Determine a função de transferência de um filtro de Butterworth de ordem 2 e frequência de corte  $\Omega_c = 1$  rad/s.

- O cálculo dos polos é feito utilizando a equação (5.27), assim:

$$p_0 = e^{j\pi/2} e^{j\pi/4} = \cos(3\pi/4) + j \operatorname{sen}(3\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$p_1 = e^{j\pi/2} e^{j3\pi/4} = \cos(5\pi/4) + j \operatorname{sen}(5\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- O cálculo de  $H(s)$ , para um filtro de ordem  $N$  e ganho unitário, é feito pela seguinte expressão:

$$H(s) = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{N-1}}{(s - p_0)(s - p_1) \cdots (s - p_{N-1})}$$

Admitindo  $N = 2$  tem-se que:

$$H(s) = \frac{p_0 p_1}{(s - p_0)(s - p_1)} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

### 5.3.1.1 Especificações para o projeto de filtros passa-baixas

As especificações mais comuns encontradas para o projeto de um filtro são ilustradas na figura 5.6. Nesta figura a resposta de amplitude de um filtro passa-baixas é linearizada por partes, onde se identificam três regiões: Uma banda de passagem ( $0$  a  $\Omega_p$ ), uma banda de transição ( $\Omega_p$  a  $\Omega_s$ ) e uma banda de atenuação ou de parada (acima de  $\Omega_s$ ). Em que,  $\Omega_p$  é a frequência da banda de passagem,  $\Omega_s$  é a frequência da banda de atenuação,  $\delta_{MAX}$  e  $\delta_{MIN}$  são as atenuações máxima da banda de passagem e mínima da banda de parada.

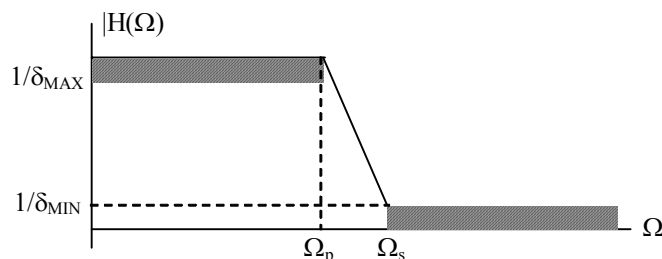


Figura 5.6: Especificações para o projeto de filtros passa-baixas.

Na faixa de passagem ( $0$  a  $\Omega_p$ ) a atenuação não pode exceder a  $\delta_{MAX}$  e na banda de atenuação (acima de  $\Omega_s$ ) a atenuação não deverá ser menor que  $\delta_{MIN}$ . Lembre que a atenuação é o inverso do ganho. Para se

obter a melhor aproximação possível de um filtro ideal, a banda de transição  $B_T = \Omega_s - \Omega_p$  deve ser a menor possível. Com estas informações determina-se facilmente a ordem  $N$  e a frequência de corte da característica de Butterworth. De posse destes resultados determina-se os polos através da equação (5.26).

**Exemplo 5:** Determine a função de transferência  $H(s)$  de um filtro de Butterworth que satisfaça as seguintes condições de projeto:  $\Omega_p = 1000\pi$  rad/s ( $F_p = 500$  Hz),  $\delta_{MAX} = 2$  dB,  $\Omega_s = 4000\pi$  rad/s ( $F_s = 2000$  Hz),  $\delta_{Min} = 40$  dB.

- Utilizando a equação (5.26), na banda de passagem tem uma atenuação de 1 dB ou um ganho de  $10^{2/20}$ .

$$\left| H(j\Omega_p) \right|^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{1000\pi}{\Omega_c} \right)^{2N}} = 10^{-2/10} \Rightarrow \left( \frac{1000\pi}{\Omega_c} \right)^{2N} = 0.5849 \quad (I)$$

- Na banda de atenuação tem-se:

$$\left| H(j\Omega_s) \right|^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{4000\pi}{\Omega_c} \right)^{2N}} = 10^{-40/10} \Rightarrow \left( \frac{4000\pi}{\Omega_c} \right)^{2N} = 9999 \quad (II)$$

- A determinação da ordem do filtro pode ser feita dividindo (II) por (I):

$$\left( \frac{4000\pi / \Omega_c}{1000\pi / \Omega_c} \right)^{2N} = \frac{9999}{0.5849} \Rightarrow (4)^{2N} = 1.7095 \cdot 10^4 \Rightarrow N = 3.51$$

A ordem do filtro é aproximada para o menor inteiro maior que 3.51. Assim:  $N = 4$

- O cálculo da frequência de corte pode ser feito utilizando ou a equação (I) ou então a (II) em que  $N = 4$ . Utilizando (I) tem-se:

$$\left( \frac{1000\pi}{\Omega_c} \right)^8 = 0.5849 \Rightarrow \Omega_c = 1069\pi \text{ rad / s}$$

Observe que esta solução não é única. Utilizando a equação (II) o resultado seria outro ( $1265\pi$  rad/s), porém qualquer que seja a frequência utilizada, o filtro estará dentro das especificações do problema.

- Cálculo dos polos, utilizando a equação (5.27):

$$p_k = 1069\pi e^{j\pi \left( \frac{1+2k+1}{2} \right)} : k = 0, 1, 2, 3$$

- Cálculo de  $H(s)$ . Após alguma manipulação algébrica tem-se:

$$H(s) = \frac{p_0 p_1 p_2 p_3}{(s - p_0)(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{1.3059 \cdot 10^{12}}{s^4 + 2.7934 \cdot 10^3 s^3 + 3.9016 \cdot 10^6 s^2 + 3.1922 \cdot 10^9 s + 1.3059 \cdot 10^{12}}$$

### 5.3.2 Resposta de Chebyshev

A família de Chebyshev apresenta como uma de suas principais características uma maior taxa de atenuação na banda de transição do que a dos outros filtros polinomiais, e ondulações na banda de passagem ou então na de atenuação. Existem dois tipos de filtros de Chebyshev: tipo I e tipo II. O primeiro tipo apresenta um comportamento oscilatório na faixa de passagem (*equiripple*) e um comportamento monotônico para frequências acima desta banda, como mostra a figura 5.7. O tipo II apresenta um comportamento exatamente oposto ao tipo I, isto é, um comportamento monotônico na faixa de passagem e oscilatório na banda de atenuação.

Para o filtro tipo I o módulo ao quadrado da sua resposta em frequência é dado por:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_p)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\Omega_n)} \quad (5.28)$$

em que:  $\varepsilon$  é um parâmetro que controla a amplitude das ondulações da banda de passagem e  $C_N(\Omega_n)$  é o polinômio de Chebyshev de ordem N.

Embora  $C_N(\Omega_n)$  seja um polinômio, ele é melhor definido em termos de funções trigonométricas como abaixo:

$$C_N(\Omega_n) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} \Omega_n), & |\Omega_n| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} \Omega_n), & |\Omega_n| > 1 \end{cases} \quad (5.29)$$

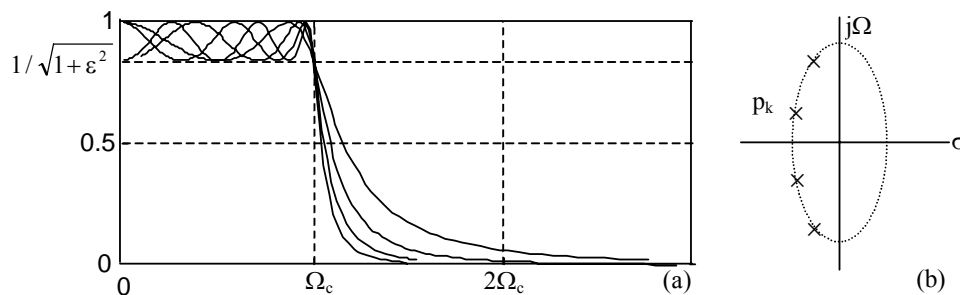
Algumas características são muito importantes para estes polinômios. Para  $|\Omega_n| \leq 1$ , eles apresentam um comportamento oscilatório, com amplitude constante variando entre  $\pm 1$  e por esta razão são chamadas também de funções *equiripple*. Para  $|\Omega_n| > 1$ , tem-se um cosseno hiperbólico e, portanto  $C_N(\Omega_n)$  cresce com maior rapidez do que qualquer outro polinômio de mesma ordem, produzindo um filtro cujas características são mostradas na figura 5.7.

Na realidade não há necessidade de se utilizar a equação (5.29), pois estes polinômios são facilmente gerados através da seguinte fórmula de recursão:

$$C_{N+1}(\Omega_n) = 2\Omega_n C_N(\Omega_n) - C_{N-1}(\Omega_n) \quad (5.30)$$

em que:  $C_0(\Omega_n) = 1$  e  $C_1(\Omega_n) = \Omega_n$  e portanto segue que:

$$\begin{aligned} C_2 &= 2\Omega_n^2 - 1 \\ C_3 &= 4\Omega_n^3 - 3\Omega_n \\ C_4 &= 8\Omega_n^4 - 8\Omega_n^2 + 1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.31)$$



**Figura 5.7:** Filtros de Chebyshev tipo I; (a) Espectro de amplitude; (b) localização dos polos.

Considerando as equações (5.28) e (5.29), as seguintes propriedades podem ser observadas:

1. Para  $\Omega = 0$  tem-se:

$$|H(0)| = \begin{cases} 1, & n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, & n \text{ par} \end{cases} \quad (5.32)$$

2. Para  $\Omega = \Omega_p$ , o ganho é mínimo na banda de passagem ou máxima atenuação nesta banda:

$$|H(\Omega_p)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \quad \text{qualquer } n \quad (5.33)$$

3. A ondulação (em dB) na banda de passagem é definida como:

$$r = 10 \log\left(\frac{H_{MAX}}{H_{MIN}}\right) = 10 \log(1+\varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{r/10} - 1 \quad (5.34)$$

4. O número total de máximos e mínimos na banda de passagem é determinado pela ordem do filtro.
5. A banda passante é definida como a faixa de frequências em que ondulação oscila na amplitude mínima.

Os polos  $p_k$  desta família de filtros são aqueles anulam o denominador da equação (5.28). Assim, eles estão localizados em uma elipse cujos raios maior ( $r_1$ ) e menor ( $r_2$ ) são dados por:

$$r_1 = \frac{\Omega_p}{2} \left( \beta + \frac{1}{\beta} \right) \quad (5.35)$$

$$r_2 = \frac{\Omega_p}{2} \left( \beta - \frac{1}{\beta} \right) \quad (5.36)$$

em que,  $\Omega_p$  é a frequência máxima da banda de passagem e o parâmetro  $\beta$ , depende de  $\varepsilon$  e da ordem  $N$ , sendo dado por:

$$\beta = \left( \sqrt{1+\varepsilon^{-2}} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/N} \quad (5.37)$$

Desse modo, eles são dados por:

$$p_k = \sigma_k + j\Omega_k = r_2 \cos \phi_k + jr_1 \sin \phi_k \quad (5.38)$$

em que:

$$\phi_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{2N} \pi \quad : k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.39)$$

As especificações para o filtro de Chebyshev são praticamente as mesmas do projeto de um filtro de Butterworth a não ser pela ondulação na banda de passagem. Desse modo, no projeto destes filtros é comum a especificação dos seguintes parâmetros: ondulação máxima na banda de passagem ( $r$ ), frequência da banda de passagem ( $\Omega_p$ ), atenuação mínima na banda de atenuação ( $\delta_s$ ) e frequência de



início desta banda ( $\Omega_s$ ). Com estes dados, o valor de  $\varepsilon$  é determinado através da equação (5.34) e a ordem  $N$  é determinada por uma das seguintes equações dadas abaixo:

$$N = \frac{\log \left\{ \frac{\sqrt{\delta_2^2 - 1} + \sqrt{\delta_2^2 + \varepsilon^2 + 1}}{2\varepsilon} \right\}}{\log \left\{ \frac{\Omega_s}{\Omega_p} + \sqrt{\left( \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)^2 - 1} \right\}} \quad (5.40)$$

em que:  $\delta_2 = 10^{\delta_s / 20}$

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{10^{r/10} - 1}{10^{\delta_s/10} - 1}} \right\}}{\cosh^{-1} \Omega_s} \quad (5.41)$$

Após os cálculos de  $N$  e  $\varepsilon$ , os polos do filtro são determinados utilizando as equações (5.37), (5.35), (5.36), (5.39) e (5.38). O exemplo a seguir ilustra o procedimento de projeto de um filtro de Chebyshev.

**Exemplo 6:** Determine a função de transferência de um filtro de Chebyshev que satisfaça as seguintes especificações: ondulação na banda de passagem  $r = 2$  dB,  $\Omega_p = 1000\pi$  rad/s ( $F_p = 500$  Hz),  $\Omega_s = 4000\pi$  rad/s ( $F_s = 2000$  Hz),  $\delta_{\text{Mmin}} = 40$  dB.

– Cálculo de  $\varepsilon$  equação (5.35):

$$\varepsilon^2 = 10^{r/10} - 1 = 10^{0.2} - 1 = 0.58489 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 0.76478$$

– Cálculo da ordem do filtro, equação (5.40):

$$\delta_2 = 10^{40/20} = 10^2$$

$$N = \frac{\log \left\{ \frac{\sqrt{10^4 - 1} + \sqrt{10^4 + 0.58489 + 1}}{2 \cdot 0.76478} \right\}}{\log \left\{ 4 + \sqrt{16 - 1} \right\}} = \frac{\log \{130.758\}}{\log \{7.87298\}} = 2.36 \quad \Rightarrow \quad N = 3$$

– Cálculo dos polos, equações (5.35), (5.36), (5.37) e (5.38):

$$\beta = \left( \sqrt{1 + \frac{1}{0.58489}} + \frac{1}{0.76478} \right)^{1/3} = 1.4348$$

$$r_1 = \frac{\Omega_p}{2} \left( 1.4348 + \frac{1}{1.4348} \right) = 1.0659\Omega_p \quad r_2 = \frac{\Omega_p}{2} \left( 1.4348 - \frac{1}{1.4348} \right) = 0.3689\Omega_p$$

$$p_0 = r_2 \cos \frac{2\pi}{3} + jr_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -0.579510^3 + j2.910^3$$

$$p_1 = r_2 \cos \pi + jr_1 \operatorname{sen} \pi = -1.15810^3$$

$$p_2 = r_2 \cos \frac{4\pi}{3} + jr_1 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -0.579510^3 - j2.910^3$$

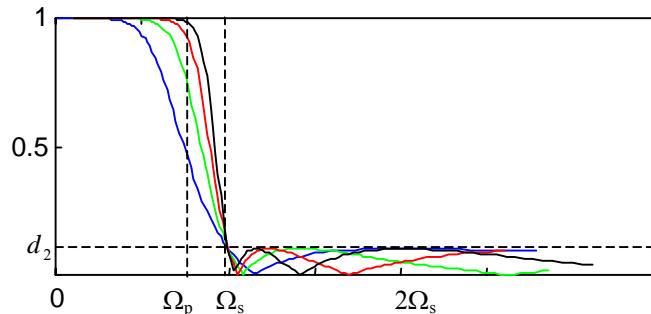
– Cálculo de  $H(s)$ . Após alguma manipulação algébrica tem-se:

$$H(s) = \frac{-p_0 p_1 p_2}{(s - p_0)(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{5.0682 \cdot 10^9}{s^3 + 1.7385 \cdot 10^3 s^2 + 9.4174 \cdot 10^6 s + 5.0682 \cdot 10^9}$$

Observe que, apesar dos dados deste exemplo serem praticamente os mesmos do exemplo 5, o filtro de Chebyshev apresenta uma ordem menor ( $N = 3$ ) do que o de Butterworth ( $N = 4$ ). Assim, comparando os filtros de Chebyshev e de Butterworth com ordens iguais, a aproximação de Chebyshev apresenta uma resposta em frequência que é mais abrupta na região de transição, mas em contrapartida ela apresenta uma ondulação na banda de passagem, e, além disso, na primeira oitava a taxa de atenuação é maior do que  $6N$  dB/oitava.

Uma segunda forma da aproximação é o **filtro de Chebyshev tipo II**, também chamado de filtro inverso de Chebyshev. Para se obter a resposta em frequência deste filtro, a variável  $\Omega_n$  da equação (5.28) é recolocada por  $1/\Omega_n$ , o que transforma a resposta em passa-altas. Subtraindo esta característica da unidade obtém o filtro passa-baixas de Chebyshev tipo II, como mostra a figura 5.8. Neste caso, o quadrado do módulo da resposta em frequência será dado por:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_N^2(1/\Omega_n)}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(1/\Omega_n)} \quad (5.42)$$



**Figura 5.8:** Espectro de amplitude do filtro de Chebyshev tipo II.

Observe que a função de transferência apresenta zeros e polos. Os zeros são prontamente calculados estabelecendo o numerador da equação (5.42) igual a zero, isto é,  $C_N(1/\Omega_n) = 0$ . Assim, eles estão localizados no eixo imaginário tal que:

$$z_k = j \frac{1}{\cos \phi_k} \quad (5.43)$$

em que:

$$\phi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.44)$$

Analisando as equações (5.28) e (5.42) observa-se que os polos são os recíprocos daqueles do filtro convencional de Chebyshev tipo I. Denotando os polos do filtro inverso de Chebyshev por:

$$p'_k = \sigma'_k + j\Omega'_k \quad (5.45)$$

então:

$$\sigma'_k = \frac{\sigma_k}{\sqrt{\sigma_k^2 + \Omega_k^2}} \quad e \quad \Omega'_k = \frac{\Omega_k}{\sqrt{\sigma_k^2 + \Omega_k^2}} \quad (5.46)$$

em que:  $\sigma_k$  e  $\Omega_k$  são as partes real e imaginária do filtro regular de Chebyshev calculados pela equação (5.38).

A desnormalização é realizada multiplicando as equações (5.43) e (5.46) pela frequência da banda de atenuação ( $\Omega_s$ ).

As localizações destes polos não pertencem a uma curva geométrica como aquelas dos filtros de Butterworth e de Chebyshev tipo I, além disso, o filtro de Chebyshev tipo I apresenta uma banda de transição mais abrupta. Em contrapartida, o filtro de Chebyshev tipo II apresenta uma resposta de fase mais regular e uma banda passante sem ondulações.

Novamente, a forma mais comum de se especificar o filtro de Chebyshev tipo II é em termos da frequência da banda de passagem ( $\Omega_p$ ), da atenuação máxima permitida nesta banda, da frequência da banda de atenuação ( $\Omega_s$ ) e da atenuação mínima permitida nesta banda ou ondulação ( $\delta_2$ ).

Admitindo  $G$  o ganho mínimo na banda de passagem tal que  $G = |H(j\Omega)| < 1$  para  $0 < \Omega < \Omega_p$ , então a ordem do filtro pode ser encontrada como o menor inteiro que satisfaz a seguinte relação:

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{G}{\varepsilon\sqrt{1-G^2}}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \quad (5.47)$$

Uma outra forma de se calcular esta ordem utiliza a atenuação mínima na banda de atenuação e a amplitude da ondulação tal que:

$$N \geq \frac{\log\left[\frac{\left(\sqrt{1-d_2^2} + \sqrt{1-d_2^2(1+\varepsilon^2)}\right)}{\varepsilon d_2^2}\right]}{\log\left[\frac{\Omega_s}{\Omega_p} + \sqrt{\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^2 - 1}\right]} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \quad (5.48)$$

em que:

$$\varepsilon = \frac{d_2}{\sqrt{1-d_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10^{\delta_2/20} - 1}} \quad (5.49)$$

$$d_2 = 10^{-\delta_2/20} \quad (5.50)$$

$$d = \sqrt{\frac{1}{d_2^2} - 1} \quad (5.51)$$

A partir das especificações o filtro pode ser determinado através do seguinte procedimento:

1. Determina-se  $\epsilon$  através da equação (5.49)
2. A ordem do filtro é determinada a partir da equação (5.47) ou (5.48),
3. Determina-se os zeros através das equações (5.43) multiplicada por  $\Omega_s$  e (5.44),
4. Calcula-se os polos do filtro de Chebyshev tipo I. Os recíprocos dados pelas equações (5.45) e (5.46), multiplicados por  $\Omega_s$  são os polos do filtro inverso tipo II,
5. A função de transferência com ganho na banda passante igual a 1 é determinada por:

$$H(s) = \frac{p'_0 p'_1 \cdots (s - z_0)(s - z_1) \cdots}{z_0 z_1 \cdots (s - p'_0)(s - p'_1) \cdots} \quad (5.52)$$

**Exemplo 7:** Determine a função de transferência de um filtro de Chebyshev tipo II que satisfaça as seguintes especificações: atenuação máxima banda de passagem 2 dB,  $\Omega_p = 2000\pi$  rad/s ( $F_p = 1000$  Hz),  $\Omega_s = 4000\pi$  rad/s ( $F_s = 2000$  Hz), atenuação mínima na banda de atenuação  $\delta_2 = 20$  dB.

- Cálculo de  $\epsilon$ , equações (5.49) e (5.50):

$$d_2 = 10^{-\delta_2/20} = 10^{-20/20} = 0.1$$

$$\epsilon = \frac{d_2}{\sqrt{1-d_2^2}} = \frac{0.1}{\sqrt{1-0.1^2}} = 0.100504$$

- Cálculo da ordem do filtro, equações (5.48) e (5.51)

$$d = \sqrt{\frac{1}{d_2^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{0.1^2} - 1} = 9.95$$

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{9.95}{0.100504}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{4000\pi}{2000\pi}\right)} = 4.015$$

- Cálculo dos zeros, equações (5.43) e (5.44), utilizando  $N = 4$  tem-se:

$$z_k = j \frac{\Omega_s}{\cos \frac{2k+1}{8} \pi} \quad k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow z_{0,3} = \pm j1.3610^4 \quad z_{1,2} = \pm j3.28410^4$$

- Cálculo dos polos do filtro de Chebyshev tipo I, equações (5.35), (5.36), (5.37) e (5.38):

$$\beta = \left[ \frac{\sqrt{1-d_2^2} + 1}{d_2} \right]^{1/4} = 2.11$$

$$r_1 = \frac{\Omega_p}{2} \frac{\beta^2 + 1}{\beta} = 8.1210^3 \quad r_2 = \frac{\Omega_p}{2} \frac{\beta^2 - 1}{\beta} = 5.1410^3$$

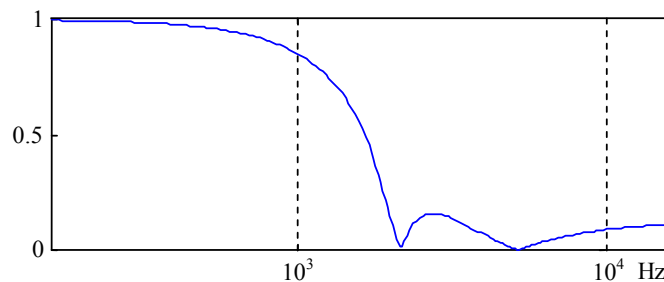
$$\begin{aligned} \sigma_k &= r_2 \cos \phi_k & \Omega_k &= jr_1 \operatorname{sen} \phi_k & \phi_k &= \frac{\pi}{2} + \frac{2k+1}{8} \pi \\ \sigma_0 &= -1.9710^3 & \Omega_0 &= 7.5010^3 & \phi_0 &= \frac{5\pi}{8} \\ \sigma_1 &= -4.7510^3 & \Omega_1 &= 3.1110^3 & \phi_1 &= \frac{7\pi}{8} \\ \sigma_2 &= -4.7410^3 & \Omega_2 &= -3.1110^3 & \phi_2 &= \frac{9\pi}{8} \\ \sigma_3 &= -1.9710^3 & \Omega_3 &= -7.5010^3 & \phi_3 &= \frac{11\pi}{8} \end{aligned}$$

– Cálculo dos polos do filtro de Chebyshev tipo II, equação (5.46):

$$\begin{aligned} \sigma'_0 &= -3.1910^3 & \Omega'_0 &= 12.1510^3 \\ \sigma'_1 &= -10.5110^3 & \Omega'_1 &= 6.8810^3 \\ \sigma'_2 &= -10.5110^3 & \Omega'_2 &= -6.8810^3 \\ \sigma'_3 &= -3.1910^3 & \Omega'_3 &= -12.1510^3 \end{aligned}$$

– Função de Transferência, equação (5.52):

$$H(s) = \frac{1.5810^8 s^2 + 2.4910^{16}}{s^4 + 2.7410^4 s^3 + 4.5010^8 s^2 + 4.3210^{12} s + 2.4910^{16}}$$



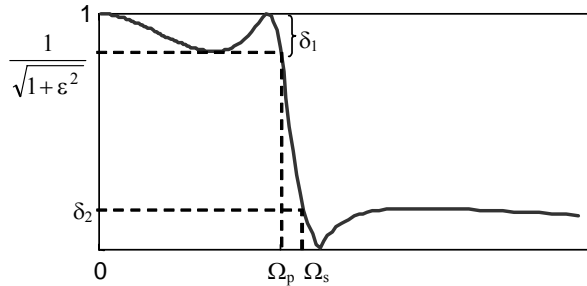
**Figura 5.9:** Espectro de amplitude do filtro do exemplo 7.

### 5.3.3 Filtros Elípticos

Os filtros elípticos (ou de Caer) possuem uma resposta em frequência cujo módulo apresenta ondulações (*equiripple*), tanto na banda de passagem quanto na de atenuação, como mostra a figura 5.10. Esta resposta é especificada em termos de quatro parâmetros, do mesmo modo que foi feito para os filtros anteriores.

- i. Ondulação ou variação máxima ( $\delta_1$ ) na banda de passagem,
- ii. Banda de transição ( $\Omega_s - \Omega_p$ ),
- iii. Ondulação ou resposta ( $\delta_2$ ) na banda de atenuação,
- iv. Ordem (N) do filtro.

O resultado final do projeto destes filtros é que, sendo especificados os três primeiros parâmetros acima o quarto, a ordem, apresentará um valor mínimo. Assim, especificando as ondulações e frequências da banda de transição este projeto conduzirá a um filtro com ordem mínima em comparação com os outros tipos de filtros descritos acima.



**Figura 5.10:** Filtro Elíptico.

A resposta em frequência dos filtros elípticos apresenta zeros e polos, sendo esta, uma generalização dos filtros de Chebyshev tal que:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 G^2(\Omega)} \quad (5.53)$$

em que  $G(\Omega)$  é uma função racional, que é uma generalização do polinômio de Chebyshev, sendo gerado através da função elíptica Jacobiana, e  $\varepsilon$  é um parâmetro relacionado com a ondulação na banda de passagem.

### Funções elípticas

Define-se a integral elíptica de primeira classe como:

$$u(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(x)}} dx \quad (5.54)$$

em que  $k$  é chamado de modulus tal que  $0 < k < 1$ .

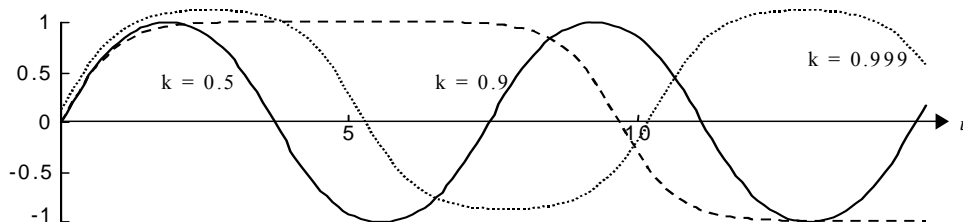
Admitindo  $\phi = \pi/2$ , a equação (5.54) é chamada de integral elíptica completa de primeira classe, tal que:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(x)}} dx \quad (5.55)$$

A função seno do inverso da equação (5.55) é definida como o seno elíptico Jacobiano de  $u$  com modulus  $k$  e é denotada por:

$$\operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sen}(\phi(u, k)) \quad (5.56)$$

Esta função é utilizada para se obter o comportamento ondulatorio da resposta de frequência dos filtros elípticos. Na figura 5.11 é mostrado o gráfico desta função em função de  $u$  e de alguns valores para o parâmetro  $k$ . Observe que esta função é periódica, com período  $4k$ . Para  $k = 0$ ,  $\operatorname{sn}(u, 0) = \operatorname{sen}(u)$  e conforme  $k$  se aproxima de 1 ela se assemelha a uma senóide saturada.



**Figura 5.11:** Seno elíptico Jacobiano em função de  $u$  e com modulus  $k$ .

### O filtro elíptico

Para se obter a função de transferência do filtro elíptico, a função racional de Chebyshev  $G(\Omega)$  é definida em termos de duas funções elípticas Jacobianas com modulus  $k$  e  $k_1$  tal que:

$$G(\Omega) = sn(n\phi, k_1) \quad (5.57)$$

em que:  $\phi = sn^{-1}(\Omega, k)$ ;  $k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$ ; e  $k_1$  é um parâmetro relacionado com a ondulação na banda de atenuação, tal que:

$$k_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{\frac{1}{\delta_s^2} - 1} \quad (5.58)$$

### A ordem do filtro elíptico

Observe pelas equações acima que a obtenção da função de transferência do filtro elíptico é muito complexa, neste texto só iremos tratar de um procedimento para o cálculo da ordem do filtro através das especificações das ondulações e frequências da banda de transição. Um procedimento para o cálculo da ordem do filtro é mostrado abaixo:

1. Calcule o fator de seletividade  $k$ ,

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \quad (5.59)$$

2. Calcule o fator de discriminação  $d$ , que é um parâmetro relacionado com a ondulação na banda de atenuação,

$$d^2 = \frac{\delta_p^2 - 1}{\delta_s^2 - 1} = \frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} \quad (5.60)$$

3. A ordem do filtro é determinada pelo menor inteiro que satisfaz,

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{16}{d^2}\right)}{\log\left(\frac{1}{q}\right)} \quad (5.61)$$

em que:  $q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$  e  $q_0 = \frac{1 - (1 - k^2)^{1/4}}{2 + (1 - k^2)^{1/4}}$

Deve-se salientar que mostrar todos os detalhes do procedimento de projeto dos filtros elípticos até se chegar ao cálculo dos zeros e polos da função de transferência é uma tarefa muito difícil e cansativa, pois envolve o desenvolvimento de muitas equações. Além disso, os cálculos das equações acima envolvem procedimentos numéricos, desse modo, foi apresentado somente um esboço do projeto e das principais equações envolvidas. Para maiores detalhes sugere-se que se consulte Zverev (1967), Parks & Burrus (1987), Antoniou (1993) ou Poularikas (1999), que tratam com detalhes do projeto destes filtros. Basta salientar aqui que existem disponíveis programas de computador e *softwares* aplicativos, tais como o Matlab, que possibilitam projetar com muita facilidade estes filtros a partir das especificações estabelecidas anteriormente.

**Exemplo 8:** Determine a ordem de um filtro elíptico que satisfaça as seguintes especificações: atenuação máxima (ou ondulação) na banda de passagem 0.1 dB,  $\Omega_p = 900$  rad/s,  $\Omega_s = 1000$  rad/s e atenuação mínima na banda de atenuação  $A_s = 50$  dB.

- cálculo do fator de discriminação:

$$d^2 = \frac{10^{0.1A_p} - 1}{10^{0.1A_s} - 1} = \frac{10^{0.1 \cdot 0.1} - 1}{10^{0.1 \cdot 50} - 1} = \frac{0.023293}{99999} = 0.23 \cdot 10^{-6}$$

- cálculo do fator de seletividade

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{900}{1000} = 0.9$$

- cálculo de q

$$q_0 = \frac{1 - (1 - k^2)^{1/4}}{2 + (1 - k^2)^{1/4}} = \frac{1 - (1 - 0.9^2)^{1/4}}{2 + (1 - 0.9^2)^{1/4}} = 0.10233$$

$$q = 0.10233 + 2 \cdot 0.10233^2 + \dots \approx 0.102354$$

- cálculo da ordem

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{16}{d^2}\right)}{\log\left(\frac{1}{q}\right)} = \frac{7.8369}{0.9899} = 7.9168 \Rightarrow N = 8$$

### 5.3.4 Filtros de Bessel

Os filtros de Bessel são uma classe de filtros somente com polos, caracterizados por apresentarem fase linear na banda de passagem. Eles são caracterizados pela seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{1}{B_N(s)} \quad (5.62)$$

em que:  $B_N(s)$  representa o polinômio de Bessel de ordem N, que pode ser expresso pela seguinte equação:

$$B_N(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k \quad e \quad a_k = \frac{(2N - k)!}{2^{N-k} k! (n - k)!} \quad (5.63)$$

Alternativamente, este polinômio pode ser gerado facilmente através da seguinte fórmula de recursão:

$$B_N(s) = (2N - 1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s) \quad (5.64)$$

com condições iniciais:  $B_0(s) = 1$  e  $B_1(s) = s + 1$ .

O filtro de Bessel tem sido empregado no projeto de filtros analógicos quando se necessita de um filtro com característica de fase linear, contudo este tipo de família não pode ser empregado no projeto de



filtros digitais, pois o processo de conversão para o domínio digital acaba com a característica de fase linear. Felizmente, esta característica pode ser obtida empregando filtros com resposta ao impulso finita (FIR), como será visto adiante.

#### 5.4 Exemplo de projeto de um filtro IIR

Sabendo-se como se obtém a função de transferência  $H(s)$  de um filtro analógico podemos facilmente chegar ao filtro digital, utilizando um dos procedimentos estudados na seção 5.2. Nesta seção vamos desenvolver um projeto completo de um filtro digital IIR utilizando dois métodos, o de aproximação das derivadas e o da transformação bilinear.

Projete um filtro digital passa-baixas com característica de Butterworth, pelo método de aproximação das derivadas e por transformação bilinear, que satisfaça as seguintes especificações:

- (a) Banda de passagem: 0 – 1 kHz, com ganho 0 dB e atenuação máxima igual a 1 dB.
- (b) Banda de atenuação: A partir de 3 kHz, com atenuação mínima igual a 10 dB.
- (c) Frequência de amostragem: 10 kHz.

##### 5.4.1 Pelo método por aproximação das derivadas

O primeiro passo de projeto é determinar o filtro de Butterworth analógico auxiliar, cujo módulo da função de transferência, equação (5.26) é mostrado abaixo:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

Observe que não é especificada a frequência de corte do filtro, mas sim a banda de transição. Assim o primeiro procedimento é calcular a frequência de corte.

- Determinação da frequência de corte e da ordem do filtro analógico.

Na banda de passagem:  $\Omega_p = 2\pi 10^3$  rad/s e  $\delta_1 = 1$  dB. Assim:

$$10 \log \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi 10^3}{\Omega_c}\right)^{2N}} \right\} \geq -1 \Rightarrow \left(\frac{2\pi 10^3}{\Omega_c}\right)^{2N} \leq 10^{0.1} - 1 \quad (5.65)$$

Na banda de atenuação:  $\Omega_a = 6\pi 10^3$  rad/s e  $\delta_2 = 10$  dB. Assim:

$$10 \log \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{6\pi 10^3}{\Omega_c}\right)^{2N}} \right\} \geq -10 \Rightarrow \left(\frac{6\pi 10^3}{\Omega_c}\right)^{2N} \leq 10 - 1 = 9 \quad (5.66)$$

Combinando as equações (5.65) e (5.66) tem-se:

$$\frac{2N \log \left[ \frac{2\pi 10^3}{\Omega_c} \right]}{2N \log \left[ \frac{6\pi 10^3}{\Omega_c} \right]} = \frac{\log(0.2589)}{\log(9)} \Rightarrow \Omega_c = 9.546810^3 \text{ rad/s} \text{ ou } f_c = 1.51910^3 \text{ Hz}$$

Substituindo  $\Omega_c$  na equação (5.65) determina-se a ordem N

$$2N \log \left[ \frac{2\pi 10^3}{9.546810^3} \right] \geq \log(0.2589) \Rightarrow N \geq 1.6 \Rightarrow N = 2$$

Adotando  $N = 2$  e utilizando a equação (5.65) obtém-se a nova frequência de corte:

$$\Omega_c = 8.8080 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \quad \text{ou} \quad f_c = 1.4018 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Observe que se fosse utilizada a equação (5.66) em vez (5.65) seria obtida uma frequência de corte diferente da obtida acima e conseqüentemente um filtro diferente, porém ambas conduzirão a filtros que satisfazem as condições de projeto dadas acima.

- Determinação da função do sistema.

Utilizando a equação (5.27) os polos do filtro são dados por:

$$p_0 = 8.80810^3 e^{j3\pi/4} = -6.228210^3 + j6.228210^3$$

$$p_1 = 8.80810^3 e^{j5\pi/4} = -6.228210^3 - j6.228210^3$$

$$H(s) = \frac{1}{(s/p_0 - 1)(s/p_1 - 1)} = \frac{7.758110^7}{s^2 + 1.2456410^4 s + 7.758110^7}$$

- Determinação do filtro digital

Para o método de aproximação das derivadas a variável  $s$  é substituída por  $(1 - z^{-1})/T = (1 - z^{-1})10^4$ . Assim:

$$H(z) = \frac{0.2568}{1 - 1.0742z^{-1} + 0.3309z^{-2}}$$

#### 5.4.2 Método por transformação bilinear

Como visto na seção 5.2.3 o método da transformação bilinear comprime o eixo de frequências. Assim, Neste projeto recomenda-se fazer uma pré-distorção neste eixo (*prewarping*) antes do projeto do filtro analógico para compensar a distorção produzida pela função tangente inversa, equação (5.25) durante o mapeamento. Esta pré-distorção é realizada pelas seguintes equações:

$$\Omega'_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_p}{2}\right) \quad \text{e} \quad \Omega'_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_s}{2}\right) \quad (5.67)$$

em que:  $w_p = \Omega_p T$  e  $w_s = \Omega_s T$ .

- Pré-distorção nas frequências

$$\Omega'_p = \frac{2}{10^{-4}} \tan\left(\frac{2\pi 10^{-1}}{2}\right) = 6.4983910^3 \text{ rad/s}$$

$$\Omega'_s = \frac{2}{10^{-4}} \tan\left(\frac{6\pi 10^{-1}}{2}\right) = 27.5276410^3 \text{ rad/s}$$

- Determinação da frequência de corte e da ordem do filtro analógico

Na banda de passagem:  $\Omega'_p = 6.49810^3 \text{ rad/s}$  e  $\delta_1 = 1\text{dB}$ . Assim:

$$10 \log \left\{ \frac{1}{1 + \left( \frac{\Omega_p'}{\Omega_c} \right)^{2N}} \right\} \geq -1 \Rightarrow \left( \frac{\Omega_p'}{\Omega_c} \right)^{2N} = 0.2589 \quad (5.68)$$

Na banda de atenuação:  $\Omega_s' = 27.52710^3 \text{ rad/s}$  e  $\delta_2 = 10\text{dB}$ . Assim:

$$10 \log \left\{ \frac{1}{1 + \left( \frac{\Omega_s'}{\Omega_c} \right)^{2N}} \right\} \geq -10 \Rightarrow \left( \frac{\Omega_s'}{\Omega_c} \right)^{2N} = 9 \quad (5.69)$$

Combinando as equações (5.68) e (5.69) tem-se que:  $N = 1.22902$

Escolhendo  $N = 2$  e utilizando a equação (5.69) determina-se a frequência de corte do filtro:

$$\Omega_c = 15.89309 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \quad \text{ou} \quad f_c = 2.52946 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

– Determinação da função do sistema.

Em vez de utilizar a equação (5.27) vamos utilizar diretamente a função do sistema para o filtro de Butterworth que é dada por::

$$H(s) = \frac{1}{(s/\Omega_c)^2 + 1.1442s/\Omega_c + 1}$$

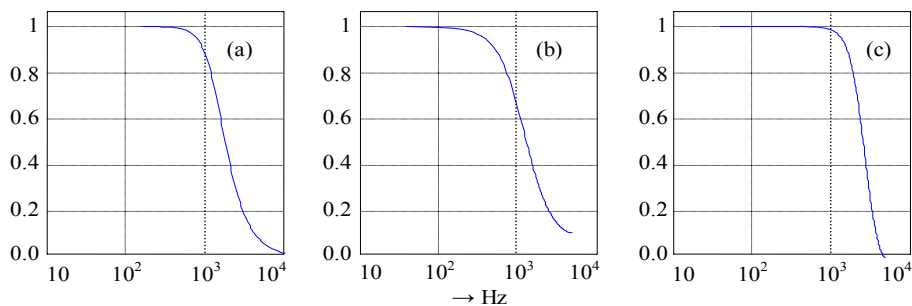
$$H(s) = \frac{1}{(s/15.89310^3)^2 + 1.1442s/15.89310^3 + 1}$$

$$H(s) = \frac{2.52587410^8}{s^2 + 2.2475910^4 s + 2.52587410^8}$$

– Determinação do filtro digital

Para o método da transformação bilinear a variável  $s$  é substituída por  $s = \frac{2}{T_a} \left[ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right]$ . Assim:

$$H(z) = \frac{0.22918 + 0.45837z^{-1} + 0.22918z^{-2}}{1 - 0.26751z^{-1} + 0.18426z^{-2}}$$



**Figura 5.12:** Projeto de Filtro IIR; (a) analógico, (b) método de aproximação das derivadas, (c) transformação bilinear.

## 5.5 Projeto de filtros digitais com resposta ao impulso finita - FIR

Nesta seção serão estudadas as técnicas de projeto dos filtros digitais cuja resposta ao impulso é finita, isto é, os filtros FIR (*finite impulse response*). A função de transferência destes filtros é um polinômio em  $z$ , somente com o numerador e a resposta a uma excitação qualquer depende somente dos valores presentes e passados da entrada, não dependendo de valores presentes e passados da saída. Outros nomes para estes filtros são: filtros não recursivos, de médias móveis ou transversais.

Os filtros FIR apresentam vantagens que os tornam muito favoráveis em algumas aplicações: são sempre estáveis e apresentam a propriedade de fase linear, conduzindo a uma resposta sem distorção na banda de passagem. A grande desvantagem é que para uma determinada resposta em frequência a ordem destes filtros é sempre muito alta, quando comparada com os filtros IIR.

Dois técnicas de projeto mais comuns serão estudadas: o projeto de filtros por janelas e o projeto por amostragem da frequência. Estas técnicas envolvem sempre aproximação de um filtro seletivo em frequência ideal tipo passa baixas, altas ou passa banda, como será visto a seguir.

### 5.5.1 Definição de um filtro FIR

Um filtro FIR, de ordem  $M-1$  é descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_{M-1}x(n-M+1) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k) \quad (5.70)$$

em que os  $b_k$  são os coeficientes;  $x(n)$  e  $y(n)$  são, respectivamente, as entrada e saída do filtro.

Expressando a sequência de saída do sistema como a soma de convolução da resposta ao impulso com o sinal de entrada tem-se que:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \quad (5.71)$$

Comparando as equações (5.70) e (5.71) observa-se que  $h(k) = b_k$ , isto é, a resposta ao impulso do filtro corresponde aos seus próprios coeficientes. Assim, o projeto destes filtros se resume em encontrar os coeficientes  $h(k)$  da resposta ao impulso, que satisfaçam um determinado conjunto de especificações da resposta em frequência. O limite inferior da somatória reflete a causalidade do filtro, e o superior a duração finita da resposta ao impulso, além disso, desde que estes coeficientes sejam limitados, o filtro será sempre estável.

A função de transferência é dada pela transformada  $z$  da equação (5.71). Assim:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)z^{-k} \quad (5.72)$$

As raízes do polinômio acima fornecem os zeros do filtro. Observe também que todos os  $M-1$  polos estão localizados na origem, comprovando a estabilidade do filtro.

### 5.5.2 Condição de fase linear

Em geral, estes filtros são projetados de modo a apresentarem uma resposta de fase linear. Um filtro apresenta resposta de fase linear se uma das seguintes condições forem satisfeitas:

$$\phi(\omega) = -\alpha\omega \quad \text{ou} \quad \phi(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad (5.73)$$

em que,  $\alpha$  é um atraso de fase constante, chamado de atraso de grupo e  $\beta = \pm\pi$ .

Pode ser mostrado que se a condição acima for satisfeita, então a resposta ao impulso do filtro apresentará simetria positiva em torno do ponto  $(M-1)/2$ , isto é,

$$h(n) = h(M-1-n) \quad : n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.74)$$

em que,  $\alpha = (M-1)/2$ .

Para mostrar a validade da condição acima seja  $M$  um número inteiro e par. Então:

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{M-1} z^{-(M-1)}$$

Colocando em evidência  $z^{-(M-1)/2}$  tem-se que:

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \left( h_0 z^{(M-1)/2} + h_1 z^{(M-1)/2-1} + \dots + h_{M-1} z^{-(M-1)/2} \right)$$

Como por hipótese  $h_0 = h_{M-1}$ ;  $h_1 = h_{M-2}$ ; ... ,então:

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \left[ h_0 \left( z^{(M-1)/2} + z^{-(M-1)/2} \right) + h_1 \left( z^{(M-1)/2-1} z^{-(M-1)/2+1} \right) + \dots + h_{M/2-1} \left( z^{1/2} + z^{-1/2} \right) \right]$$

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \sum_{k=0}^{M/2-1} h_k \left( z^{[(M-1)/2-k]} + z^{-[(M-1)/2-k]} \right) \quad (5.75)$$

Substituindo  $z$  por  $e^{jw}$  tem-se:

$$H(e^{jw}) = e^{-jw(M-1)/2} \sum_{k=0}^{M/2-1} h_k \left( e^{jw[(M-1)/2-k]} + e^{-jw[(M-1)/2-k]} \right) \quad (5.76)$$

Portanto, utilizando a fórmula de Euler,

$$H(e^{jw}) = e^{-jw(M-1)/2} \sum_{k=0}^{M/2-1} 2h_k \cos w((M-1)/2-k) \quad (5.77)$$

Observe que a equação acima apresenta um termo real que corresponde à somatória e portanto a fase linear é refletida pela exponencial, isto é:

$$\phi(w) = -w(M-1)/2 \quad (5.78)$$

Acima da frequência em que o termo real se torna negativo deve-se somar  $\pi$  à equação acima.

O mesmo procedimento acima poderia ser repetido admitindo  $M$  um número inteiro ímpar. Neste caso:

$$H(e^{jw}) = e^{-jw(M-1)/2} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} 2h_k \left[ 1 + \cos w((M-1)/2-k) \right] \quad (5.79)$$

**Exemplo 9:** Determine o módulo e a fase da função de transferência de um filtro FIR de média, cuja resposta ao impulso é dada por:

$$h(n) = \frac{1}{3}\delta(n) + \frac{1}{3}\delta(n-1) + \frac{1}{3}\delta(n-2)$$

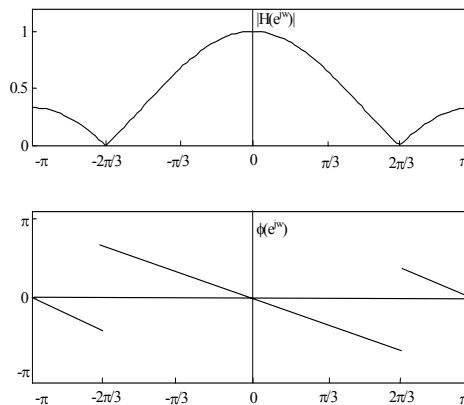
Observe que neste caso  $M-1 = 2$  e a resposta ao impulso é simétrica em torno do ponto  $(M-1)/2=1$ . Calculando a transformada de Fourier de  $h(n)$  tem-se que:

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{3} \{1 + e^{-jw} + e^{-j2w}\} = e^{-jw} \frac{1}{3} \{e^{jw} + 1 + e^{-jw}\} = e^{-jw} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos w \right\}$$

Portanto, o módulo e a fase desse filtro serão:

$$|H(e^{jw})| = \frac{1}{3} |1 + 2 \cos w| \quad e \quad \phi(e^{jw}) = \begin{cases} -w, & 0 \leq w \leq 2\pi/3 \\ \pi - w, & 2\pi/3 < w < \pi \end{cases}$$

Observe na figura 5.13, mostrada abaixo, que a resposta de fase deste filtro é linear com a frequência.



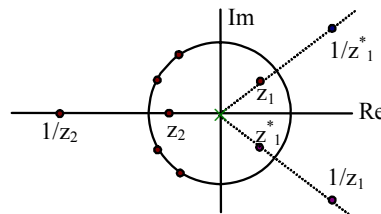
**Figura 5.13:** Módulo e fase da função de transferência do filtro FIR do exemplo 9.

### 5.5.3 Localização dos zeros de um filtro FIR com fase linear

Para um filtro FIR com fase linear, os zeros apresentam algumas simetrias devido à simetria imposta na resposta ao impulso  $h(n)$ . Analisando melhor a equação (5.75), pode-se verificar que no domínio da frequência a condição de fase linear é refletida pela seguinte relação:

$$H(z) = z^{-(M-1)} H(1/z) \tag{5.80}$$

Este resultado mostra que as raízes de  $H(z)$  são as mesmas de  $H(1/z)$ , isto é, os zeros ocorrem em pares recíprocos. Para valores reais  $z_i$  e  $1/z_i$  são raízes de  $H(z)$  e desde que os coeficientes do filtro são reais, então, para valores complexos  $z_i$ ,  $1/z_i^*$ ,  $z_i^*$  e  $1/z_i$  são raízes de  $H(z)$ . A figura 5.14 ilustra este fato.



**Figura 5.14:** Localização dos zeros de um filtro FIR com fase linear

Estas simetrias podem ser utilizadas para implementar formas em cascata com seções com fase linear.

### 5.6 Projeto de filtros FIR por janelas

Este tipo de projeto é baseado diretamente na aproximação de uma resposta em frequência desejada, com a condição de fase linear. Em geral, esta resposta é escolhida baseando-se nos filtros seletivos em frequência ideais. Estes, sempre são não causais e com resposta ao impulso com duração infinita. A escolha de uma janela adequada no domínio do tempo trunca a resposta ao impulso para se obter um filtro FIR causal e com fase linear.

Este método se inicia, portanto, com a especificação de uma resposta em frequência desejada, admitindo fase linear e a consequente determinação da resposta ao impulso unitário. Assim:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{jw}) e^{jwn} dw \quad (5.81)$$

Como  $h_d(n)$  tem duração infinita, ela deve ser truncada de acordo com a ordem  $(M-1)$  que se deseja obter. Se o truncamento for direto, este procedimento é equivalente a multiplicar  $h_d(n)$  por uma janela retangular,  $w(n)$ , tal que:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & |n| \geq M \end{cases} \quad (5.82)$$

Assim, a resposta ao impulso do filtro FIR será dada por:

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \begin{cases} h_d(n), & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & |n| \geq M \end{cases} \quad (5.83)$$

Com a determinação de  $h(n)$  tem-se determinado o filtro FIR pois elas são os seus próprios coeficientes.

O efeito da multiplicação de  $h_d(n)$  pela janela  $w(n)$  é melhor compreendido, lembrando que a resposta em frequência do filtro é dada pela convolução entre a resposta em frequência desejada e a transformada de Fourier da janela. Assim:

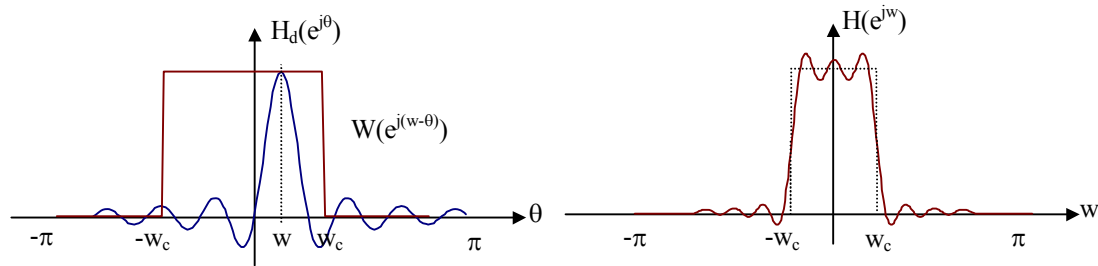
$$H(e^{jw}) = H_d(e^{jw}) * W(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) H(e^{j(w-\theta)}) d\theta \quad (5.84)$$

Desse modo, a resposta em frequência do filtro obtido é uma versão "manchada" da resposta em frequência desejada pela resposta em frequência da janela (neste caso a retangular).

No caso de se utilizar a janela retangular da equação (5.82) a transformada de Fourier é dada por:

$$W(e^{jw}) = e^{-jw(M-1)/2} \frac{\text{sen}(wM/2)}{\text{sen } w/2} \quad (5.85)$$

A figura 5.15 mostra a resposta em frequência da janela retangular e a resposta em frequência de um filtro FIR obtido a partir de um filtro ideal passa baixas. Observe que a convolução de  $H_d(e^{jw})$  por  $W(e^{jw})$  resulta em um filtro com ondulações tanto na banda de passagem, quanto na banda de atenuação. Este efeito é devido aos lóbulos laterais relativamente grandes da resposta em frequência da janela retangular.



**Figura 5.15:** Convolução no projeto de filtros FIR por janelas.

Com o auxílio da figura 5.15 as seguintes observações podem ser feitas:

1. A janela  $w(n)$  apresenta tamanho finito  $M$ , a sua resposta em frequência apresenta um lóbulo principal cuja largura é proporcional a  $1/M$  e lóbulos laterais de menores amplitudes que causam ondulações na resposta em frequência do filtro.
2. O lóbulo principal é o responsável pela largura da banda de transição em  $H(e^{jw})$ . Quanto maior a largura deste lóbulo maior será a banda de transição do filtro. A janela retangular apresenta a menor largura, mas em compensação os maiores lóbulos laterais, quando comparados com outras janelas (tabela 5.1).
3. A figura 5.13 sugere ainda que se  $W(e^{jw})$  é escolhida de modo a ter uma banda bem estreita então  $H(e^{jw})$  se aproximará melhor de  $H_d(e^{jw})$ . Contudo, esta consideração conduzirá a uma janela com duração muito longa. Isto é um requerimento conflitante, pois a escolha da janela deveria ser governada pelo desejo de se ter a duração mais curta possível e a menor banda de transição.
4. O efeito dos lóbulos laterais pode ser reduzido pelo uso de outras janelas que apresentam uma transição mais suave antes do truncamento como é o caso da transição abrupta da janela retangular. Esta transição abrupta é que produz lóbulos laterais grandes no espectro de frequências.
5. Diversas janelas têm sido propostas para o projeto de filtros FIR. Algumas das mais utilizadas, tais como a de Hanning, Hamming e de Blackman que são definidas na tabela 5.1.

**Tabela 5.1:** Algumas janelas para o projeto de filtros FIR

| Janela     | Banda de transição ( $\Delta f$ ) | Pico relativo do lóbulo lateral (dB) | Atenuação na banda de parada (dB) | Equação da janela $[w(n)]$<br>$n = 0, 1, \dots, M-1$  |
|------------|-----------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|---|
| Retangular | $0.9/M$                           | -13                                  | 21                                | 1   |
| Hanning    | $3.1/(M-1)$                       | -31                                  | 44                                | $0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right)$   |
| Hamming    | $3.3/(M-1)$                       | -41                                  | 53                                | $0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right)$   |
| Blackman   | $5.5/(M-1)$                       | -57                                  | 74                                | $0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M-1}\right)$ |

Para maiores detalhes a respeito das janelas consulte o apêndice A1. Observe que, quando comparadas com a janela retangular, as outras janelas apresentam uma banda de transição maior, porém, a atenuação na banda de parada é muito maior do que a janela retangular e as ondulações são praticamente nulas. No projeto dos filtros FIR por janelas, a segunda coluna, largura da banda de transição, pode ser utilizada para se determinar a ordem do filtro, a partir das frequências da banda de passagem e de



atenuação. A coluna com a atenuação na banda de parada auxilia na escolha da janela. Determinada a janela a ser utilizada e a ordem do filtro, o projeto é finalizado multiplicando-se  $w(n)$  por  $h_d(n)$ , conforme a equação 5.83. As respostas ao impulso unitário dos filtros ideais podem ser obtidas na tabela 5.2 mostrada abaixo.

**Tabela 5.2:** Resposta ao impulso dos filtros ideais.

| Filtro de ordem M-1 | $h_d(n)$  |
|---------------------|---|
| Passa-baixas        | $\frac{\text{sen}\left[w_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}$  |
| Passa-altas         | $\frac{\text{sen}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} - \frac{\text{sen}\left[w_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}$                       |
| Passa-banda         | $\frac{\text{sen}\left[w_{c2}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} - \frac{\text{sen}\left[w_{c1}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}$ |
| Rejeita-banda       | $\frac{\text{sen}\left[w_{c1}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} - \frac{\text{sen}\left[w_{c2}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}$ |

**Exemplo 10:** Projete um filtro FIR passa baixas com frequência de corte  $w_c$  e com fase linear.

- Neste caso a resposta em frequência do filtro ideal desejado será dada por:

$$H_d(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jw(M-1)/2}, & |w| < w_c \\ 0, & w_c < |w| \leq \pi \end{cases}$$

- Calculando a correspondente resposta ao impulso tem-se que:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{-jw(M-1)/2} e^{jwn} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c}^{w_c} e^{-jw\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} dw = \frac{\text{sen}\left[w_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}$$

- Observe que  $h_d(n) = h_d(n - (M-1)/2)$ . Utilizando uma das janelas mostradas anteriormente tem-se que:

$$h(n) = \frac{\text{sen}\left[w_c\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)} w(n)$$

Admitido  $w_c = 0.8\pi$  ( $f_c = 0.4$ ) e  $M = 9$  (ordem 8) os seguintes coeficientes são obtidos para as janelas de Hamming e retangular.

**Tabela 5.3:** Coeficientes dos filtros FIR para as janelas retangular e de Hamming com  $M = 9$ .

| $h(n)$ | retangular | Hamming |
|--------|------------|---------|
| $h(0)$ | -0.0468    | -0.0037 |
| $h(1)$ | 0.1009     | 0.0217  |
| $h(2)$ | -0.1514    | -0.0817 |
| $h(3)$ | 0.1871     | 0.1619  |
| $h(4)$ | 0.8        | 0.8     |
| $h(5)$ | 0.1871     | 0.1619  |
| $h(6)$ | -0.1514    | -0.0817 |
| $h(7)$ | 0.1009     | 0.0217  |
| $h(8)$ | -0.00468   | -0.0037 |

Observe a simetria da resposta ao impulso em torno do índice  $n = (M-1)/2 = 4$ , obtida por causa da condição de fase linear. As figuras 5.16 e 15.17 mostram o espectro de amplitudes e a resposta ao impulso para os dois filtros com ordens 8 e 50, respectivamente. Observe que em ambos os casos a janela retangular conduz a um filtro com ondulações acentuadas tanto na banda de passagem, quanto na de atenuação. Enquanto que a janela de Hamming conduz a um filtro com uma resposta sem ondulações na banda de passagem, mas com uma banda de transição maior. Observe também com o auxílio da figura 5.17 que para uma melhor aproximação na característica de frequência, devem-se utilizar filtros FIR com ordens elevadas.

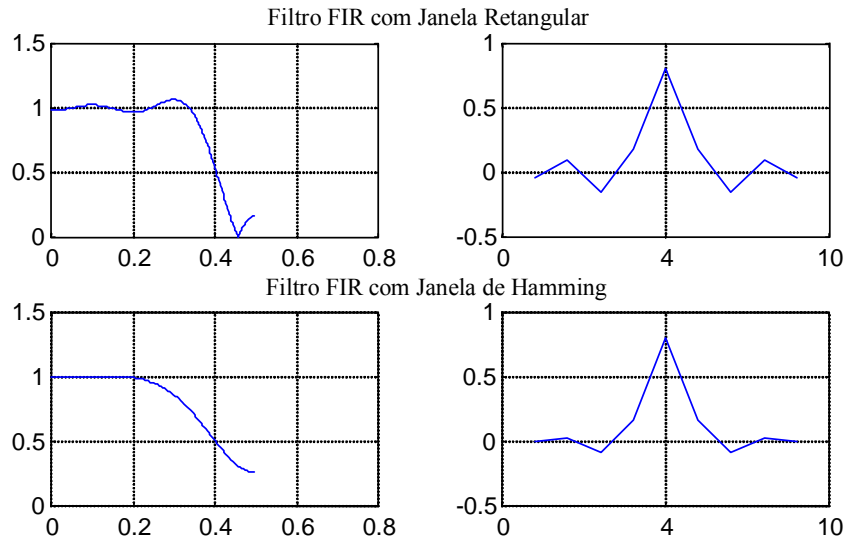


Figura 5.16: Espectro de amplitude e resposta ao impulso para o filtro do exemplo 10, com  $M = 9$ .

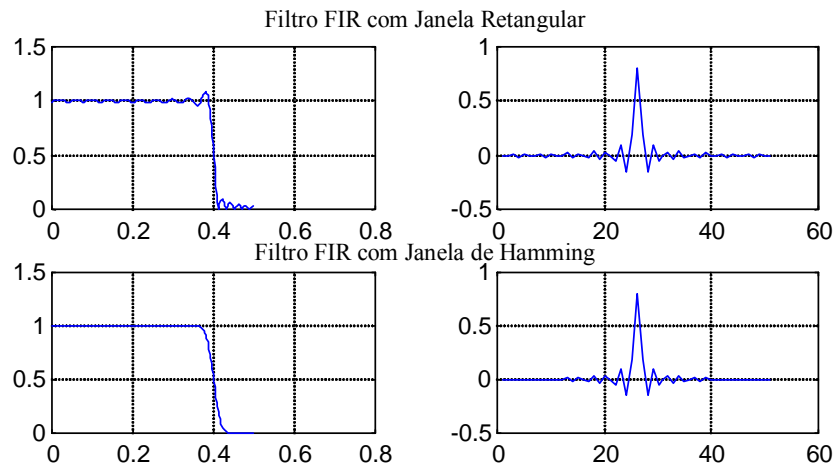


Figura 5.17: Espectro de amplitude e resposta ao impulso com  $M = 51$ .

**Exemplo 11:** Projete um filtro FIR passa-baixas, com fase linear que apresente as seguintes características:

$$\begin{cases} 0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01, & 0 \leq \omega \leq 0.25\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.01, & 0.35\pi \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

– atenuação na banda de parada:

$$\delta_p = 0.01 \Rightarrow A = -20 \log_{10}(\delta_p) = 40dB$$

- banda de transição:

$$\Delta\omega = 0.35\pi - 0.25\pi = 0.1\pi \Rightarrow \Delta f = 0.05$$

- determinação da janela e da ordem do filtro:

Utilizando a tabela 5.1 notamos que podemos escolher a janela de Hanning que apresenta uma atenuação na banda de parada igual a 44 dB, que é suficiente para se alcançar a especificação desejada. Além disso ela apresenta uma menor banda de transição do que as janelas de Hamming e Blackman. Assim:

$$M - 1 = \frac{3.1}{\Delta f} = 62 \Rightarrow w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{\pi n}{31}\right) \quad n = 0, 1, \dots, 62$$

- filtro desejado (ideal):

Vamos admitir que a frequência de corte para o filtro ideal seja o ponto médio da banda de transição, ou seja:

$$\omega_c = \frac{0.35\pi + 0.25\pi}{2} = 0.3\pi$$

Assim, utilizando a tabela 5.2, a resposta em frequência desejada será:

$$h_d(n) = \frac{\text{sen}(0.3\pi(n-31))}{\pi(n-31)} \quad n = 0, 1, \dots, 62$$

e a resposta ao impulso do filtro será:

$$h(n) = w(n)h_d(n) = \left[0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{\pi n}{31}\right)\right] \frac{\text{sen}(0.3\pi(n-31))}{\pi(n-31)} \quad n = 0, 1, \dots, 62$$

Verifique neste exemplo que se utilizássemos a janela de Hamming a ordem do filtro seria igual a 66 e no caso da janela de Blackman seria de 110, muito maior do que a janela de Hanning utilizada.

### 5.7 Projeto de filtros FIR utilizando janela de Kaiser

A janela de Kaiser conduz a um projeto otimizado de filtros FIR. No projeto de filtros por janelas, o ideal seria utilizar uma janela tal que no domínio da frequência ela fosse maximamente concentrada em torno de  $\omega = 0$ . A janela que mais se aproxima desta condição ideal é a de Kaiser, que é definida como:

$$w_k(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left[\beta\left(1 - \left[\frac{n-\alpha}{\alpha}\right]^2\right)^{1/2}\right]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (5.86)$$

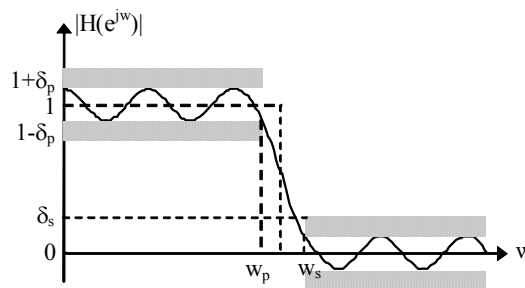
em que:  $\alpha = (M-1)/2$ ,  $\beta$  é um parâmetro que depende da atenuação do filtro e  $I_0[\cdot]$  representa a função de Bessel modificada de ordem zero.

Esta função pode ser escrita pela seguinte série:

$$I_0[x] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{2} \right)^k \right]^2 \quad (5.87)$$

Esta série converge de maneira tal que ao redor de 25 termos são necessários para uma boa aproximação, de Fatta (1988), para a maioria das aplicações.

O projeto utilizando janela de Kaiser utiliza especificações semelhantes àquelas dos projetos de filtros analógicos. Ele começa com a especificação das ondulações nas bandas de passagem e de atenuação, como mostra a figura 5.18 e a definição de um erro  $\delta$  que é dado pelo valor mínimo entre as ondulações na banda de passagem ( $\delta_p$ ) e de parada ( $\delta_s$ ). A região de transição é definida como a diferença entre as frequências das bandas de passagem,  $w_p$ , e de atenuação ou parada,  $w_s$ . A frequência da banda de passagem é definida como a frequência máxima tal que  $|H(e^{jw})| \geq 1 - \delta_p$  e a da banda de atenuação é a frequência mínima tal que  $|H(e^{jw})| \leq \delta_s$ . Nestas condições o seguinte procedimento é feito para o projeto de filtros FIR utilizando janelas de Kaiser:



**Figura 5.18:** Especificação de projeto para janelas de Kaiser

Sendo dados  $w_p$ ,  $w_s$ ,  $\delta_p$  e  $\delta_s$  faça o seguinte procedimento:

1. Defina o erro mínimo tal que:

$$\delta = \min[\delta_p, \delta_s] \quad (5.87)$$

2. Determine a constante de erro

$$A = -20 \log(\delta) \quad (5.88)$$

3. O valor do parâmetro  $\beta$  (veja a tabela 5.4) é determinado empiricamente pela seguinte expressão:

$$\beta = \begin{cases} 0, & A \leq 21 \text{ dB} \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \text{ dB} < A \leq 50 \text{ dB} \\ 0.1102((A - 8.72)), & A > 50 \text{ dB} \end{cases} \quad (5.89)$$

4. A ordem do filtro é também determinada empiricamente utilizando a banda de transição. Sendo  $\Delta w = w_s - w_p$  ou  $\Delta f = f_s - f_p$ , então:

$$M - 1 \geq \frac{A - 7.95}{2.285 \Delta w} = \frac{A - 7.95}{14.357 \Delta f} \quad (5.90)$$

5. A resposta ao impulso do filtro será dada por:

$$h(n) = h_d(n)w_k(n) \quad (5.91)$$

em que  $h_d(n)$  pode ser a resposta ao impulso de um dos filtros ideais mostradas na tabela 5.2.

**Tabela 5.4:** Parâmetros da janela de Kaiser em função de  $\beta$ .

| Parâmetro $\beta$ | Largura da banda de transição ( $\Delta f$ ) | Pico relativo do lóbulo lateral (dB) | Atenuação na banda de parada (dB) |
|-------------------|--|--------------------------------------|-----------------------------------|
| 2                 | 1.5/M  | -19                                  | 29                                |
| 4                 | 2.6/M  | -30                                  | 45                                |
| 6                 | 3.8/M  | -44                                  | 63                                |
| 8                 | 5.1/M  | -59                                  | 81                                |
| 10                | 6.4/M  | -74                                  | 99                                |

### 5.8 Projeto de filtros FIR por amostragem em frequência

O método de amostragem em frequência permite o projeto de filtros FIR tanto para os filtros ideais quanto para filtros com resposta em frequência arbitrárias. Generalizando as equações (5.77), (5.78) e (5.79), a resposta em frequência de um filtro FIR com fase linear terá a seguinte forma:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(M-1)/2} H_r(e^{j\omega}) \quad (5.92)$$

sendo que,  $H_r(e^{j\omega})$  é a parte real da resposta em frequência tal que:

$$H_r(e^{j\omega}) = h((M-1)/2) + 2 \sum_{k=0}^{(M-1)/2-1} h(n) \cos \omega((M-1)/2 - n) \quad : M \text{ ímpar} \quad (5.93)$$

$$H_r(e^{j\omega}) = 2 \sum_{k=0}^{M/2-1} h(n) \cos \omega((M-1)/2 - n) \quad : M \text{ par} \quad (5.94)$$

A característica de fase será dada por:

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\omega(M-1)/2, & H_r(e^{j\omega}) > 0 \\ -\omega(M-1)/2 + \pi, & H_r(e^{j\omega}) < 0 \end{cases} \quad (5.95)$$

O mesmo procedimento acima poderia ser repetido admitindo  $h(n)$  antissimétrica, isto é,  $h(n) = -h(M-1-n)$ , porém esse procedimento não é muito comum.

O método por amostragem em frequência é também realizado através da especificação de uma resposta em frequência desejada  $H_d(e^{j\omega})$ . Esta resposta é especificada em frequências discretas regularmente espaçadas, tais que:

$$w_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2} \quad M \text{ ímpar} \\ k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} \quad M \text{ par} \quad (5.96)$$

O parâmetro  $\alpha$  é estabelecido como sendo 0 ou 1/2, Proakis (1992). Aqui, neste trabalho, será utilizado o caso mais comum com  $\alpha = 0$ . Nas frequências especificadas por  $w_k$ , a resposta em frequência,  $H(k)$ , do filtro digital deve ser a mesma do filtro desejado tal que:

$$H(k) = H_d(w_k) = H\left(\frac{2\pi}{M}k\right) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \quad (5.97)$$

Para se determinar  $h(n)$  basta calcular a transformada inversa da equação acima. Assim:

$$h(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k)e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \quad (5.98)$$

Esta equação pode ser calculada utilizando algoritmos de transformada rápida de Fourier, ou então simplificada devido à condição de simetria de  $h(n)$  em torno do ponto  $(M-1)/2$ . Como  $h(n)$  é real então  $H(k)$  apresenta módulo par e fase ímpar satisfazendo a seguinte condição de simetria:

$$H(k) = H^*(M - k) \quad (5.99)$$

Explorando esta propriedade e as equações (5.93), (5.94) e (5.95) chega-se a uma solução simplificada para o cálculo de  $h(n)$ .

$$h(n) = \frac{1}{M} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^P G(k) \cos \left[ \frac{2\pi}{M} k \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (5.100)$$

tal que:

$$P = \frac{M-1}{2}, M \text{ ímpar} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{2} - 1, M \text{ par} \quad (5.101)$$

$$G(k) = (-1)^k H_r(k) \quad \text{ou} \quad H(k) = e^{j\frac{2\pi}{M}k} G(k) \quad (5.102)$$

Observe que este tipo de projeto é otimizado, pois nas frequências estabelecidas pelo projeto o erro de aproximação é nulo. Infelizmente não existe um método para se estabelecer a ordem do filtro, como no caso do filtro utilizando janela de Kaiser.

**Exemplo 12:** Determine, pelo método de amostragem em frequência, os coeficientes de um filtro FIR com fase linear e  $M = 17$  que satisfaz a seguinte condição:

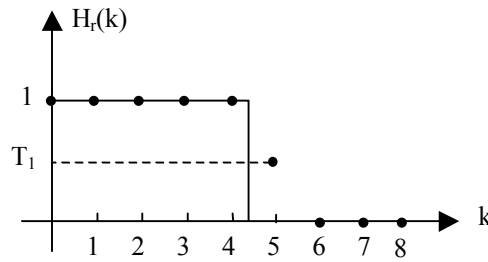
$$H_r(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, 3, 4 \\ T_1, & k = 5 \\ 0, & k = 6, 7, 8 \end{cases}$$

$T_1 = 0.4$  é o valor do termo na banda de transição. A resposta em frequência do filtro acima é mostrada na figura (5.19).

Utilizando a equação (5.100) tem-se que:

$$h(n) = \frac{1}{17} \left\{ G(0) + 2 \sum_{k=1}^8 G(k) \cos \left[ \frac{2\pi}{17} k \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

em que:  $G(k) = (-1)^k H_r(k)$



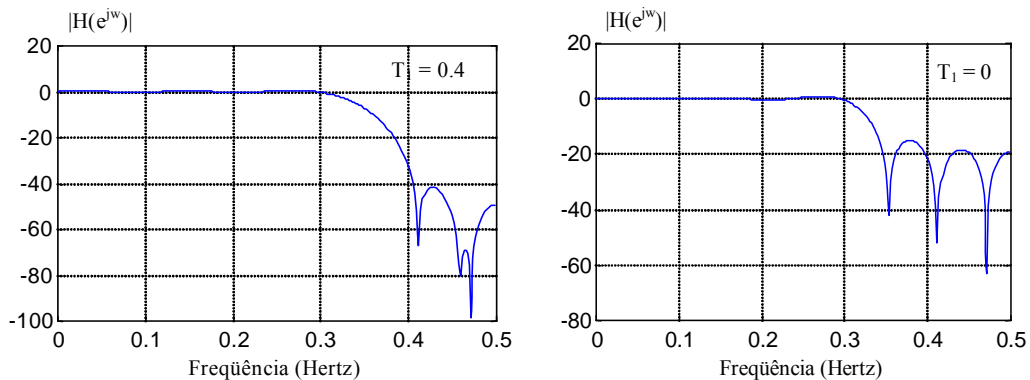
**Figura 5.19:** Exemplo projeto de filtros FIR por amostragem de frequência.

Resolvendo a equação anterior se chega aos seguintes coeficientes:

Coeficientes do filtro

|                |             |
|----------------|-------------|
| $h(0) = h(16)$ | -0.01012334 |
| $h(1) = h(15)$ | 0.01463976  |
| $h(2) = h(14)$ | 0.01103875  |
| $h(3) = h(13)$ | -0.0453175  |
| $h(4) = h(12)$ | 0.04397129  |
| $h(5) = h(11)$ | 0.02334887  |
| $h(6) = h(10)$ | -0.142825   |
| $h(7) = h(9)$  | 0.2582083   |
| $h(8)$         | 0.6941176   |

A resposta em frequência deste filtro é mostrada na figura 5.20.a. O valor  $T_1$  na banda de transição é muito importante neste método de projeto pois a sua escolha influencia diretamente não valor da atenuação da banda de atenuação. No exemplo anterior se fosse escolhido  $T_1 = 0$ , a banda de transição seria mais abrupta, mas em contrapartida a banda de atenuação iria apresentar uma atenuação menor, como mostra a figura 5.20.b. Portanto, existe um compromisso no projeto destes filtros para a escolha do valor de  $T_1$ . Este valor é determinado tal que o módulo da função de transferência apresente atenuação máxima dos lóbulos laterais. Proakis (1993) e Rabiner (1970) apresentam extensivas tabelas com especificação das atenuações e valores ótimos para o termo da banda de transição.



**Figura 5.20:** Resposta em frequência para o filtro do exemplo12, (a)  $T_1 = 0.4$  e (b)  $T_1 = 0$ .

### Exercícios

22. Para cada um dos seguintes filtros estabeleça a ordem e identifique os seus coeficientes:

- (e)  $y(n) = 2x(n) - x(n-1) + y(n-1)$
- (f)  $y(n) = x(n-1) - x(n-2) - y(n-1)$
- (g)  $y(n) = x(n) + x(n-1) - y(n-1) - 0.5y(n-3)$
- (h)  $y(n) = 2x(n) - x(n-1)$
- (i)  $y(n) = 0.5x(n-3)$
- (j)  $y(n) = x(n) - x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$

23. Determine as funções de transferência de cada um dos filtros do exercício 1.

24. Um filtro digital é descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + 0.4y(n-1)$$

- (a) O filtro é recursivo ou não recursivo. Justifique a resposta.
- (b) Qual a ordem do filtro?
- (c) Determine a resposta em frequência e desenhe o espectro de amplitudes.
- (d) Sendo  $\{1 \ 4 \ 6 \ 2 \ -1 \ 0\}$  a sequência aplicada na entrada do filtro, determine a sequência de saída desde  $y(0)$  até  $y(6)$ .

25. Um filtro digital apresenta a seguinte função de transferência:

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.9z^{-1}}$$

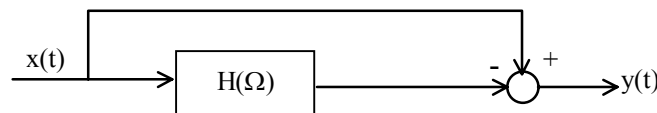
- (a) Desenhe o diagrama de polos e zeros.
- (b) Desenhe o módulo da função de transferência
- (c) Determine a fórmula de recursão que relaciona os valores das amostras de saída e de entrada.
- (d) Determine e esboce a resposta ao impulso do filtro

26. Um filtro analógico apresenta a seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

- (a) Utilize transformação bilinear para converter o filtro no seu equivalente digital (admita  $T = 0.5$ ).
- (b) Encontre a equação de recursão do filtro.
- (c) Desenhe o módulo da resposta em frequência para ambos os filtros e compare os resultados.

27. A figura abaixo é um sistema utilizado para obter um filtro passa-altas a partir de um filtro passa baixas.



- Demonstre graficamente que se  $H(\Omega)$  é um passa baixas ideal com frequência de corte  $\Omega_{lp}$  então o sistema todo será um passa altas ideal; e se  $H(\Omega)$  é um passa altas ideal com frequência de corte  $\Omega_{hp}$  então o sistema todo será um passa baixas ideal e determine sua frequência de corte.



28. Projete um filtro digital IIR de primeira ordem, com característica de Butterworth e frequência de corte  $\omega_c = 0.3\pi$ .
29. Projete um filtro digital passa-baixas com característica de Butterworth que satisfaça as seguintes especificações:
- (a) Banda de passagem: 0 – 1 kHz e atenuação máxima de 1 dB.
  - (b) Banda de atenuação: a partir de 3 kHz com atenuação mínima de 20 dB.
  - (c) Frequência de amostragem: 10 kHz.

30. Repita o exercício anterior utilizando característica de Chebyshev.

31. Projete um filtro FIR passa-baixas utilizando o método por janelas que satisfaça as seguintes especificações:

Frequência da banda de passagem: 1.5 kHz  
 Largura da banda de transição: 0.5 kHz  
 Atenuação na banda de atenuação: > 50 dB  
 Frequência de amostragem: 10 kHz

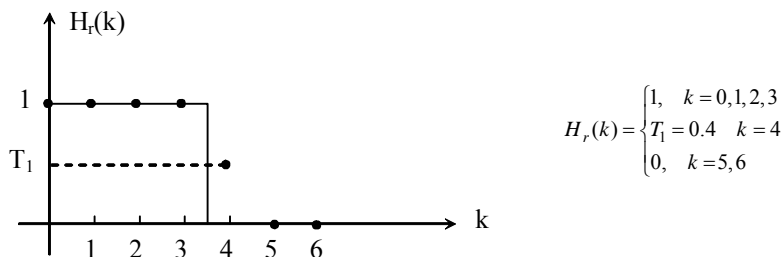
32. Projete um filtro FIR passa-baixas, com  $f_c = 0.4$  ( $\omega_c = 0.8\pi$ ) utilizando janela de Hamming e  $M = 9$ .

OBS:  $\frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad x \rightarrow 0$

33. Determine a resposta de amplitude e de fase de um filtro FIR causal cuja função de transferência é dada por:

$$H(z) = \sum_{m=0}^3 h(m)z^{-m} \quad \text{em que: } h(m)=h(M-m) \quad M=3$$

34. Projete um filtro FIR passa-baixas, com fase linear e ordem 14, pelo método de amostragem em frequência, que aproxime a característica de frequência dada abaixo. Desenhe o módulo da função de transferência.



35. Considere as seguintes especificações para um filtro digital passa-baixas:

$$\begin{cases} 0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01, & 0 \leq |\omega| \leq 0.25\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.01, & 0.35\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- a) Projete um filtro FIR com fase linear utilizando o método de janelas.
- b) Repita o projeto utilizando a janela de Kaiser.

36. Considere as seguintes especificações para um filtro FIR passa-banda:

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(e^{jw})| \leq 0.005, \quad 0 \leq |w| \leq 0.2\pi \\ 0.95 \leq |H(e^{jw})| \leq 1.05, \quad 0.3\pi \leq |w| \leq 0.6\pi \\ |H(e^{jw})| \leq 0.01, \quad 0.7\pi \leq |w| \leq \pi \end{array} \right.$$

Projete o filtro utilizando o método por janelas.

37. Um filtro digital FIR, passa-baixas, foi projetado utilizando janela de Kaiser com as seguintes especificações:

Ordem  $M = 50$

Frequência da banda de passagem:  $w_p = 0.4\pi$

Frequência da banda de atenuação:  $w_s = 0.5\pi$

Determine a atenuação mínima na banda de atenuação para este filtro.

38. Suponha que se tenha um sinal discreto no tempo, que apresenta uma interferência senoidal com frequência angular  $w_0$ . Projete um filtro FIR, com coeficientes reais, que elimine completamente esta componente de frequência. OBS: Lembre que para filtros FIR com coeficientes reais os zeros complexos devem aparecer na forma de complexos conjugados.

**Capítulo 6**

**Projetos Otimizados de Filtros**

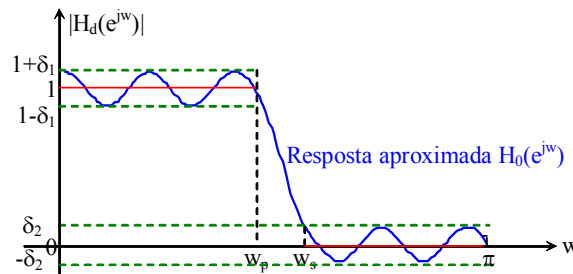
**6.1 Projeto de filtros FIR *equiripple***

Nesta seção vamos considerar o problema da aproximação de Chebyshev para o projeto de filtros FIR com fase linear. Neste tipo de projeto é definida uma função de erro entre as respostas em frequência desejada e a aproximada. Este erro é multiplicado por uma função de ponderação  $W(e^{j\omega})$  e o seu valor absoluto máximo é então minimizado. Este procedimento é visualizado como um projeto ótimo desde que para uma dada ordem  $M$ , o erro máximo é minimizado nas bandas de interesse. Uma propriedade importante é que o filtro resultante apresenta ondulações de amplitudes iguais (*equiripple*) nas bandas passante e de parada (atenuação).

Para descrever o procedimento de projeto vamos considerar o projeto de um filtro FIR passa baixas ideal, não-causal, com fase nula e resposta em frequência  $H_d(e^{j\omega})$ . Este filtro e a sua correspondente aproximação,  $H_0(e^{j\omega})$ , são mostrados na figura 6.1. A função desejada é estabelecida com ganho igual a 1 na banda de passagem e ganho zero na banda de atenuação e nenhuma especificação é feita para a banda de transição.

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_p \\ 0, & \omega_s \leq |\omega| < \pi \end{cases} \tag{6.1}$$

em que  $\omega_p$  e  $\omega_s$  são, respectivamente, as frequências das bandas de passagem e de atenuação.



**Figura 6.1:** Limites de erro para o projeto de um filtro passa-baixas.

A figura 6.1 ilustra os limites de erro para o projeto de um filtro passa-baixas,  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são, respectivamente, os erros absolutos máximos nas bandas de passagem ( $0$  a  $\omega_p$ ) e de atenuação ( $\omega_s$  a  $\pi$ ). Para uma dada ordem estes erros devem ser mínimos. O ganho do filtro ideal é estabelecido igual à unidade.

Considerando um filtro tipo I com fase nula, a seguinte propriedade é válida:

$$h_0(n) = h_0(-n) \quad : n = 0, 1, \dots, L = M / 2 \tag{6.2}$$

em que  $M$  é um número par e corresponde à ordem do filtro.

A sua correspondente resposta em frequência é dada por:

$$H_0(e^{jw}) = \sum_{k=-L}^L h_0(n) e^{jwn} \quad (6.3)$$

em que  $L = M/2$ .

Por causa da simetria par na equação (6.2), a resposta em frequência pode ser reescrita como:

$$H_0(e^{jw}) = h_0(0) + \sum_{n=1}^L 2h_0(n) \cos(wn) \quad (6.4)$$

em que  $H_0(e^{jw})$  é uma função real, par e periódica em  $w$ .

O filtro acima é não causal. Um filtro causal, com fase linear é obtido é obtido facilmente do filtro não-causal atrasando  $h_0(n)$  por  $L = M/2$  amostras. Assim,

$$h(n) = h_0(n - M/2) = h(M - n) \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (6.5)$$

com resposta em frequência,

$$H(e^{jw}) = H_0(e^{jwn}) e^{-jwM/2} \quad (6.6)$$

Considerando a equação (6.4), podemos verificar que os termos  $\cos(wn)$  podem ser expressos como uma soma de potências de  $\cos(w)$ , utilizando os polinômios de Chebyshev de ordem  $n$ , tal que:

$$\cos(wn) = T_n(\cos(w)) \quad (6.7)$$

em que:

$$T_n(x) = \cos(\cos^{-1}(x)) \quad (6.8)$$

Assim, desenvolvendo a equação acima para  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} T_0(\cos(w)) &= 1 \\ T_1(\cos(w)) &= \cos(w) \\ T_2(\cos(w)) &= 2 \cos^2(w) - 1 \\ T_3(\cos(w)) &= 4 \cos^3(w) - 3 \cos(w) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6.9)$$

Consequentemente a equação (6.4) pode ser reescrita como um polinômio de ordem  $L$  em  $\cos(w)$ ,

$$H_0(e^{jw}) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos^k(w) \quad (6.10)$$

assim,  $H_0(e^{jw})$  é um polinômio de ordem  $L$  em  $\cos(w)$ , desse modo, podemos considerar o problema de sua aproximação função de  $\cos(w)$  e da ordem do filtro.

Pode ser mostrado (Parks and McClellan 1972 a e b) que fixando  $L$  ou  $M$ ,  $w_p$  e  $w_{s3}$ , o projeto dos filtros FIR recai no problema de aproximação de Chebyshev sobre conjuntos disjuntos. Este problema é formalizado, definindo uma função de erro ponderada tal que:

$$E(e^{jw}) = W(e^{jw}) \left[ H_d(e^{jw}) - H_0(e^{jw}) \right] \quad (6.11)$$

em que  $W(e^{jw})$  é uma função de ponderação que incorpora os parâmetros do erro de aproximação no procedimento de projeto. A função de erro é definida em subintervalos do intervalo  $0 \leq w < \pi$ .

Por exemplo, para o filtro passa-baixas ideal, definido pela equação (6.1) os subintervalos onde o erro é definido são:  $0 \leq w < w_p$  e  $w_s \leq w < \pi$ . Permitindo um erro absoluto máximo  $\delta_2$ , a função de ponderação é dada por:

$$W(e^{jw}) = \begin{cases} k = \frac{\delta_2}{\delta_1}, & 0 \leq |w| \leq w_p \quad \text{banda de passagem} \\ 1, & w_s \leq |w| < \pi \quad \text{banda de atenuação} \end{cases} \quad (6.12)$$

### O critério de Projeto – Teorema das Alternâncias

Sendo definida a função de erro ponderado  $E(e^{jw})$ , o problema é determinar os coeficientes do filtro que minimizam o valor máximo absoluto deste erro nos intervalos em que a aproximação é considerada. Em termos matemáticos tem-se que:

$$\min_{\substack{h_0(n) \text{ ou } a(n) \\ 0 \leq n \leq L}} \left( \max_{w \in F} |E(e^{jw})| \right) \quad (6.13)$$

em que  $F$  é o subconjunto (união disjunta) das bandas de frequência onde a minimização é realizada.

Seja  $F$  um subconjunto fechado consistindo da união disjunta de outros subconjuntos fechados no intervalo  $[0, \pi]$ . Seja  $P(e^{jw})$  um polinômio de ordem  $L$ ,

$$P(e^{jw}) = \sum_{k=0}^L a(k) \cos(wk) \quad (6.14)$$

Sejam  $H_d(e^{jw})$  uma função contínua em  $F$ ,  $W(e^{jw})$  uma função positiva e contínua em  $F$  e seja também  $E(e^{jw})$  uma função de erro ponderada tal que:

$$E(e^{jw}) = W(e^{jw}) \left[ H_d(e^{jw}) - P(e^{jw}) \right] \quad (6.15)$$

O teorema das alternâncias estabelece que a condição necessária e suficiente para que  $P(e^{jw})$  seja único e minimize o valor absoluto do erro é que  $E(e^{jw})$  exiba pelo menos  $L + 2$  alternâncias, isto é,

$$\text{para } w_1 < w_2 < \dots < w_{L+2} \in F \Rightarrow E(e^{jw_i}) = -E(e^{jw_{i+1}}) = \pm \delta, \quad i = 1, 2, \dots, L+1 \quad (6.16)$$

em que  $\delta = \max |E(e^{jw})|, \quad w \in F$ .

Para o filtro FIR tipo I, nas frequências discretas  $w_i$ , admitindo  $P(e^{jw}) = H_0(e^{jw})$ , a equação (6.11) torna-se idêntica à equação (6.15), assim:

$$E(e^{jw_i}) = W(e^{jw_i}) \left[ H_d(e^{jw_i}) - H_0(e^{jw_i}) \right] = (-1)^{i+1} \delta, \quad i = 1, 2, \dots, L+2 \quad (6.17)$$

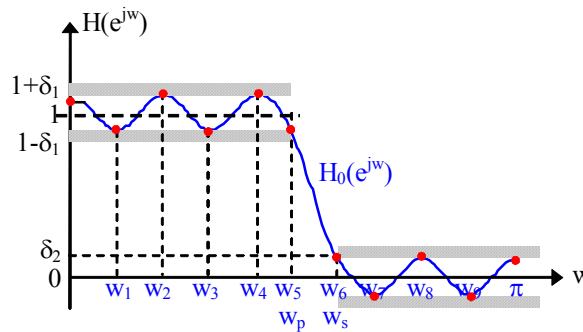
e os coeficientes  $a_n$  estão relacionados com os coeficientes do filtro através da seguinte fórmula:

$$a(0) = h_0(0) = h\left(\frac{M}{2}\right) \tag{6.18}$$

$$a(n) = 2h\left(\frac{M}{2} - n\right) = 2h_0(n) = \quad n=1, 2, \dots, \frac{M}{2}$$

A figura 6.2. mostra a resposta em frequência de um filtro obtido através do teorema das alternâncias para  $L = 8$  ( $M = 16$ ). Os círculos na figura indicam os pontos onde ocorrem as alternâncias. Algumas propriedades importantes que se deve ressaltar são:

- O filtro apresenta pelo menos  $L+2$  alternâncias, mas pode ocorrer um máximo de  $L+3$  alternâncias.
- Os valores da resposta em frequência nas frequências  $w_p$  e  $w_s$  são considerados sempre pontos onde ocorrem estas alternâncias.
- O filtro é *equiripple*, ondulação com amplitude máxima constante, exceto, possivelmente, nas frequências  $w = 0$  e  $w = \pi$ .
- Este filtro apresenta o menor erro de aproximação ponderado,  $\delta$ , para uma determinada banda de transição  $w_s - w_p$ .
- Para a função de ponderação  $W(e^{jw})$ , definida pela equação (6.12), o erro máximo na banda de atenuação será  $\delta_2 = \delta$  e o erro máximo na banda de passagem será  $\delta_1 = k\delta$ .
- $\delta_1$  e  $\delta_2$  não precisam ser necessariamente iguais.



**Figura 6.2:** Filtro obtido utilizando o teorema das alternâncias para  $L = 8$ .

### Algoritmo de Parks-McClellan

As equações (6.17) podem ser escritas na forma matricial em termos dos coeficientes de  $P(e^{jw})$ ,  $a(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, L$ , como segue::

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(w_1) & \dots & \cos(Lw_1) & 1/W(e^{jw_1}) \\ 1 & \cos(w_2) & \dots & \cos(Lw_2) & -1/W(e^{jw_2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(w_{L+1}) & \dots & \cos(Lw_{L+1}) & (-1)^{L+1}/W(e^{jw_{L+1}}) \\ 1 & \cos(w_{L+2}) & \dots & \cos(Lw_{L+2}) & (-1)^{L+2}/W(e^{jw_{L+2}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(0) \\ a(1) \\ \vdots \\ a(L) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(e^{jw_1}) \\ H_d(e^{jw_2}) \\ \vdots \\ H_d(e^{jw_{L+1}}) \\ H_d(e^{jw_{L+2}}) \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

Não há necessidade de se utilizar inversão matricial para a solução da equação (6.19). Ela pode ser resolvida utilizando fórmulas de interpolação de lagrange (Oppenheim, 1989), como segue:

- i. Forneça um conjunto inicial de frequências  $w_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, L+2$ , que incluem as frequências das bandas de passagem e de atenuação,  $w_p$  e  $w_s$ .
- ii. Encontre  $\delta$  resolvendo as seguintes equações:

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(e^{jw_k})}{\sum_{k=1}^{L+2} (-1)^{k+1} b_k / W(e^{jw_k})} \text{ e } b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+2} \frac{1}{\cos(w_k) - \cos(w_i)} \quad (6.20)$$

iii. Fórmulas da interpolação de Lagrange para o cálculo de  $H_0(e^{jw})$  ou  $P(e^{jw})$ .

$$H_0(e^{jw}) = P(e^{jw}) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} C_k d_k / [\cos(w) - \cos(w_k)]}{\sum_{k=1}^{L+1} d_k / [\cos(w) - \cos(w_k)]} \quad (6.21)$$

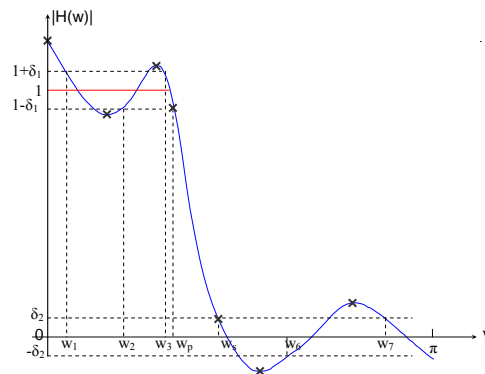
$$C_k = H_d(e^{jw_k}) - \frac{(-1)^{k+1} \delta}{W(e^{jw_k})} \quad (6.22)$$

$$d_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{\cos(w_k) - \cos(w_i)} = \frac{b_k}{\cos(w_k) - \cos(w_{L+2})} \quad (6.23)$$

iv. Se  $|E(e^{jw})| \leq \delta$  em F então a aproximação foi encontrada, caso contrário um novo conjunto de frequências deve ser fornecido e volte ao passo 2.

O novo conjunto de frequências a ser adotado é aquele no qual as frequências correspondem aos maiores picos positivos e negativos, como mostra a figura 6.3 nos pontos marcados com um ‘x’, contudo, as frequências das bandas de passagem e de atenuação devem permanecer neste conjunto. A pesquisa para se obter as frequências dos novos picos é realizada em um conjunto mais denso para evitar erros maiores de aproximação. Se houver erros máximos em  $w = 0$  e  $w = \pi$ , então a frequência do pico de maior valor é a escolhida.

No final os coeficientes  $h_0(n)$ , de  $H_0(e^{jw}) = P(e^{jw})$ , são os coeficientes do filtro digital otimizado, substituindo na equação (6.5) temos o filtro otimizado.



**Figura 6.3:** Atualização das frequências para o algoritmo de Pars-McClellan.

Herrmann (1973), desenvolveu uma fórmula de projeto em função de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $w_p$  e  $w_s$  para se estimar a ordem para o projeto de filtros passa-baixas,

$$M = \frac{-10 \log(\delta_1 \delta_2) - 13}{2.324(w_s - w_p)} \quad (6.24)$$

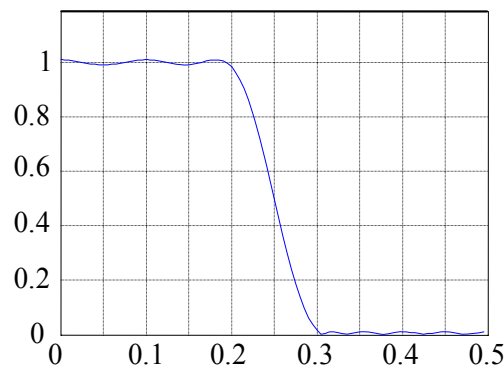
Esta fórmula fornece uma boa aproximação da ordem a ser utilizada. Se o filtro for projetado com a ordem determinada acima, apresentar um erro maior que o especificado, a ordem do filtro pode ser aumentada até que as condições de projeto sejam alcançadas.

**Exemplo 1:** A figura 6.4 mostra o módulo da resposta em frequência de um filtro projetado pelo algoritmo de Parks-McClellan com as seguintes especificações:  $\delta_1 = \delta_2 = 0.01$ ,  $f_p = 0.2$  e  $f_s = 0.3$ . A ordem do filtro é calculada pela equação (6.24),

$$M = \frac{-10 \log(0.01 \times 0.01) - 13}{2.324 \times 2 \times \pi \times (0.3 - 0.2)} = 18.49$$

Para o filtro tipo I utilizamos  $M = 18$ , e com o auxílio de um computador, obtemos os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} h_0 &= h_{18} = 1.2498 \cdot 10^{-2} \\ h_1 &= h_{17} = 0 \\ h_2 &= h_{16} = -2.3095 \cdot 10^{-2} \\ h_3 &= h_{15} = 0 \\ h_4 &= h_{14} = 4.5809 \cdot 10^{-2} \\ h_5 &= h_{13} = 0 \\ h_6 &= h_{12} = -9.455710^{-2} \\ h_7 &= h_{11} = 0 \\ h_8 &= h_{10} = 3.1433 \cdot 10^{-1} \\ h_9 &= 5.0000 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$



**Figura 6.4:** Exemplo de projeto utilizando o algoritmo de Parks-McClellan.

### Filtro passa-baixas tipo II

Para o filtro passa-baixas tipo II com fase linear, em que  $M$  é um número ímpar, são válidas as seguintes fórmulas:

$$h(n) = h(M - n), \quad n = 0, 1, \dots, M \quad (6.25)$$

$$H(e^{jw}) = e^{-j \frac{M}{2} w} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} b(k) \cos \left[ \left( k - \frac{1}{2} \right) w \right] \quad (6.26)$$

$$b(k) = 2h \left( \frac{M+1}{2} - k \right), \quad k = 0, 1, \dots, (M+1)/2 \quad (6.27)$$



Neste caso, admitindo:

$$\begin{aligned}\tilde{b}(1) &= \frac{1}{2}b(2) \\ \tilde{b}(k) &= 2b(k) - \tilde{b}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, \frac{M-3}{2} \\ \tilde{b}\left(\frac{M-1}{2}\right) &= 2b\left(\frac{M+1}{2}\right)\end{aligned}\tag{6.28}$$

então a resposta em frequência será dada por:

$$H(e^{jw}) = e^{-j\frac{M}{2}w} \cos\left(\frac{w}{2}\right) \sum_{k=1}^{(M-1)/2} \tilde{b}(k) \cos(kw)\tag{6.29}$$

e as funções desejadas e a de ponderação do erro serão dadas por:

$$H_d(e^{jw}) = \begin{cases} \frac{1}{\cos\left(\frac{w}{2}\right)}, & 0 \leq |w| \leq w_p \quad \text{banda de passagem} \\ 0, & w_s \leq |w| < \pi \quad \text{banda de atenuação} \end{cases}\tag{6.30}$$

$$W(e^{jw}) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} \cos\left(\frac{w}{2}\right), & 0 \leq |w| \leq w_p \quad \text{banda de passagem} \\ \cos\left(\frac{w}{2}\right), & w_s \leq |w| < \pi \quad \text{banda de atenuação} \end{cases}\tag{6.31}$$

e a equação (19) é resolvida em termos dos coeficientes  $\tilde{b}(k)$ .

Existem implementados programas de computador para a obtenção dos coeficientes do filtro utilizando o método acima, veja, por exemplo, referências 17 e 19 da bibliografia e também softwares avançados, como por exemplo o MatLab, que facilitam o projetista na obtenção dos filtros *equiripple*.

## 6.2 Aproximação de Padé

A aproximação de Padé é utilizada para filtros IIR. As técnicas de projeto para filtros IIR são baseadas na transformação da função de transferência,  $H(s)$ , de um filtro analógico para uma função  $H(z)$  do filtro digital, através de uma função de mapeamento  $s = f(z)$ , como foi estudado no capítulo 5. A técnica de Padé é uma técnica de projeto baseada nos mínimos quadrados, que aproxima diretamente um filtro baseando-se diretamente na resposta ao impulso desejada  $h_d(n)$  do sistema.

Seja  $H(z)$  a função racional de um sistema causal, isto é,

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}\tag{6.32}$$

Esta função de transferência apresenta  $N = P + Q + 1$  parâmetros livres, os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$ , que podem ser selecionados para minimizar um erro segundo algum critério. O procedimento para encontrar estes coeficientes é estabelecer que a resposta ao impulso do filtro seja igual à resposta ao impulso do filtro desejado para  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1 = P+Q$ , isto é,

$$h(n) = h_d(n), \quad n = 0, 1, \dots, P + Q \quad (6.33)$$

Note que a equação (6.32) pode ser escrita como segue,

$$H(z)A(z) = B(z) \quad (6.34)$$

Transformando a equação acima para o domínio do tempo, através da propriedade da soma de convolução segue que,

$$a(n) * h(n) = h(n) + \sum_{k=1}^P a(k)h(n-k) = b(n) \quad (6.35)$$

A equação (6.35) é um conjunto de  $P + Q + 1$  equações lineares distintas, assim, estabelecendo  $h(n) = h_d(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, P + Q$ , tem-se que:

$$h_d(n) + \sum_{k=1}^P a(k)h_d(n-k) = \begin{cases} b(n), & n = 0, 1, \dots, Q \\ 0, & n = Q + 1, \dots, Q + P \end{cases} \quad (6.36)$$

pois, pela equação (6.32)  $b(n) = 0$  para  $n > Q$ .

Para a solução do filtro, o primeiro passo é determinar os coeficientes  $a(k)$ . Admitindo, na equação (6.36), que  $n = Q + 1, \dots, P + Q$  e que as equações sejam linearmente independentes, então,

$$\begin{bmatrix} h_d(Q) & h_d(Q-1) & \dots & h_d(Q-P+1) \\ h_d(Q+1) & h_d(Q) & \dots & h_d(Q-P+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_d(Q+P-1) & h_d(Q+P-2) & \dots & h_d(Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ aP \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h_d(Q+1) \\ h_d(Q+2) \\ \vdots \\ h_d(Q+P) \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Determinado os coeficientes  $a_k$  através da equação acima, os coeficientes  $b_k$  são determinados admitindo  $n = 0, 1, \dots, Q$  na equação (6.36) ou seja,

|   |        |
|---|--------|
| $b(n) = h_d(n) + \sum_{k=1}^P a(k)h_d(n-k), \quad n = 0, 1, \dots, Q$ | (6.38) |
|---|--------|

**Exemplo 2:** Seja  $h_d(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ , determine, por aproximação de Padé, um filtro  $H(z)$  que aproxima  $H_d(z)$  tal que:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Observe que  $P = Q = 1$ , assim pela equação (6.37),

$$h_d(1)a_1 = -h_d(2) \rightarrow a_1 = -\frac{1/2}{1} = -1/2$$

Pela equação (6.38),

$$b_0 = h_d(0) = 2$$

$$b_1 = h_d(1) + a_1 h_d(0) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

portanto,

$$H(z) = \frac{2}{1 - 0.5z^{-1}}$$

### 6.3 Método de Prony

O método de Prony é utilizado também no projeto de filtros IIR e é uma extensão do método de Padé. Ele utiliza a abordagem dos mínimos quadrados para determinar os coeficientes do filtro. O método consiste em encontrar os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$ , equação (6.32), que minimizam o erro quadrático médio entre a resposta ao impulso desejada e a resposta ao impulso do filtro encontrado.

Como as respostas ao impulso são reais e admitindo um filtro causal, este erro pode ser escrito como:

$$\varepsilon = E \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (h_d(n) - h(n))^2 \right] \quad (6.39)$$

Considerando a equação (6.36), admitindo  $n \geq Q + 1$ , podemos escrever que:

$$h_d(n) = - \sum_{k=1}^P a(k) h_d(n-k), \quad n \geq Q+1 \quad (6.40)$$

Admitindo  $h_d(n) = h(n)$  e substituindo a equação (6.40) em (6.39) o erro quadrático médio pode ser escrito como:

$$\varepsilon = E \left[ \sum_{n=Q+1}^{\infty} \left( h_d(n) + \sum_{k=1}^P a(k) h_d(n-k) \right)^2 \right] \quad (6.41)$$

Os coeficientes  $a_k$ , que minimizam  $\varepsilon$ , podem ser encontrados estabelecendo as derivadas parciais de  $\varepsilon$  em relação aos coeficientes  $a_k$  iguais a zero, assim, após alguma manipulação matemática tem-se que:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_l} = E \left[ \sum_{n=Q+1}^{\infty} h_d(n) h_d(n-l) \right] + \sum_{k=1}^P a(k) E \left[ \sum_{n=Q+1}^{\infty} h_d(n-k) h_d(n-l) \right] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (6.42)$$

Admitindo:

|   |
|---|
| $r_h(k, l) = E \left[ \sum_{n=Q+1}^{\infty} h_d(n-k) h_d(n-l) \right] \quad (6.43)$ |
|---|

ou seja,  $r_h(k, l)$  é similar à função de autocorrelação da resposta ao impulso desejada.

Portanto, a equação (6.42) pode ser reescrita como:

$$r_h(k,l) + \sum_{k=1}^P a(k)r_h(k,0) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, P \quad (6.44)$$

Para uma facilidade maior de observação, podemos também escrever a equação (6.44) na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} r_h(1,1) & r_h(1,2) & \dots & r_h(1,P) \\ r_h(2,1) & r_h(2,2) & \dots & r_h(2,P) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_h(P,1) & r_h(P,P) & \dots & r_h(P,P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(P) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_h(1,0) \\ r_h(2,0) \\ \vdots \\ r_h(P,0) \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Uma vez determinados os coeficientes  $a_k$ , os coeficientes  $b_k$  são encontrados utilizando a equação (6.38), ou seja:

$$b(n) = h_d(n) + \sum_{k=1}^P a(k)h_d(n-k), \quad n = 0, 1, \dots, Q \quad (6.46)$$

#### 6.4 Projeto de filtros FIR pelo método dos mínimos quadrados

Sabemos que um sistema inverso de um sistema linear invariante no tempo, com resposta ao impulso  $h(n)$ , é aquele que satisfaz as seguintes condições:

$$h(n) * h_I(n) = \delta(n) \quad (6.47)$$

No domínio da frequência a transformada  $z$  da equação acima é dada por

$$H(z) * H_I(z) = 1 \quad (6.48)$$

em que  $h_i(n)$  e  $H_I(z)$  são, respectivamente a resposta ao impulso e a função do sistema linear invariante no tempo inverso.

Se  $H(z)$  é um sistema somente com polos, então  $H_I(z)$  será um sistema FIR, caso contrário ele será um sistema IIR, assim, restringindo  $h(n) = h_i(n)$  como a resposta ao impulso de um filtro FIR de ordem  $M$  e truncando  $h(n)$  tal que:

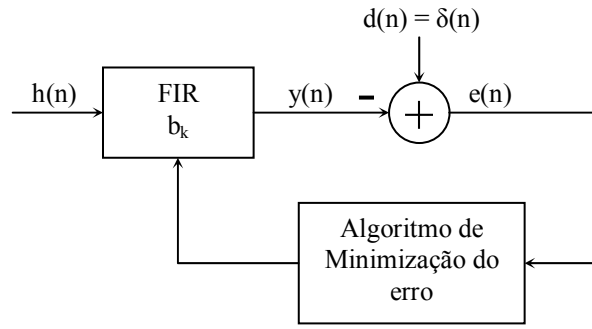
$$h_I(n) = h(n) \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (6.49)$$

Admitindo  $n > M$   $h_i(n)$  é o erro de aproximação, assim, este procedimento conduz a um erro quadrático de aproximação igual a:

$$\varepsilon_t = \sum_{n=M+1}^{\infty} h_i^2(n) \quad (6.50)$$

Um método alternativo para o projeto é utilizar o critério do erro quadrático mínimo para otimizar os coeficientes  $b_k$  do filtro FIR. Este procedimento é descrito abaixo.

Seja  $d(n)$  a sequência de saída desejada do filtro FIR e seja  $h(n)$  a sequência de entrada do filtro a ser aproximado, como mostra a figura 6.5.



**Figura 6.6:** Filtro inverso FIR pelo método dos mínimos quadrados.

O erro entre a saída do filtro e a resposta desejada será:

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \sum_{k=0}^M b_k h(n-k) \quad (6.51)$$

em que  $b_k$  são os coeficientes do filtro.

Assim, o erro quadrático médio será:

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ d(n) - \sum_{k=0}^M b_k h(n-k) \right]^2 \quad (6.52)$$

Este erro pode ser minimizado derivando a equação acima em relação aos coeficientes  $b_k$  e igualando o resultado a zero. Após alguma manipulação algébrica chega-se que:

$$\sum_{k=0}^M b_k r_{hh}(k-l) = r_{dh}(l) \quad l = 0, 1, \dots, M \quad (6.53)$$

em que:

|  |
|--|
| $r_{hh}(l) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)h(n-l) \quad e \quad r_{dh}(l) = \sum_{n=0}^{\infty} d(n)h(n-l) \quad (6.54)$ |
|--|

O filtro que satisfaz a equação (6.53) é chamado de filtro de Wiener. Admitindo que o filtro vai aproximar o filtro inverso, isto é,  $d(n) = \delta(n)$ , então:

$$r_{dh}(l) = \begin{cases} h(0), & l = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.55)$$

O conjunto de equações em (6.53) podem ser expressos na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} r_{hh}(0) & r_{hh}(1) & \cdots & r_{hh}(M) \\ r_{hh}(1) & r_{hh}(0) & \cdots & r_{hh}(M-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{hh}(M) & r_{hh}(M-1) & \cdots & r_{hh}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

E o erro mínimo será:

$$\varepsilon_{\min} = 1 - h(0)b_0 \tag{6.57}$$

Observe que a matriz da equação (6.56) é simétrica, com todos os elementos iguais ao longo da diagonal principal. Esta matriz é conhecida como matriz de Toeplitz. Utilizando as propriedades deste tipo de matriz foi desenvolvido o algoritmo eficiente (de Levinson-Durbin), que resolve rapidamente a equação (6.56) sem utilizar métodos de inversão de matrizes.

**Exemplo 3:** Seja  $h(n)$  a resposta ao impulso de um sistema tal que:

$$h(n) = \begin{cases} 4, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 0, & n = 3 \end{cases}$$

Encontre o filtro FIR inverso, com  $M = 3$  e o erro mínimo que aproxima o sistema acima pelo método dos mínimos quadrados.

– Para encontrar o filtro FIR inverso devemos resolver a equação (6.53) mostrada abaixo:

$$\sum_{k=0}^M b_k r_{hh}(k-l) = \begin{cases} h(0), & k = 0 \\ 0, & l = 1, \dots, M = 3 \end{cases}$$

– Cálculo de  $r_{hh}(l) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)h(n-l)$

–  $r_{hh}(0) = \sum_{n=0}^2 h(n)h(n-0) = h^2(0) + h^2(1) + h^2(2) = 21$

–  $r_{hh}(1) = \sum_{n=0}^2 h(n)h(n-1) = h(1)h(0) + h(2)h(1) = 10$

–  $r_{hh}(2) = \sum_{n=0}^2 h(n)h(n-2) = h(2)h(0) = 4$

– Para o cálculo dos coeficientes do filtro FIR, utilizamos as equações (6.53) ou (6.56), assim:

$$\begin{bmatrix} 21 & 10 & 4 \\ 10 & 21 & 10 \\ 4 & 10 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = 0.2469 \\ b_1 = -0.1231 \\ b_2 = 0.0116 \end{cases}$$

– O erro mínimo é dado pela equação (6.57):

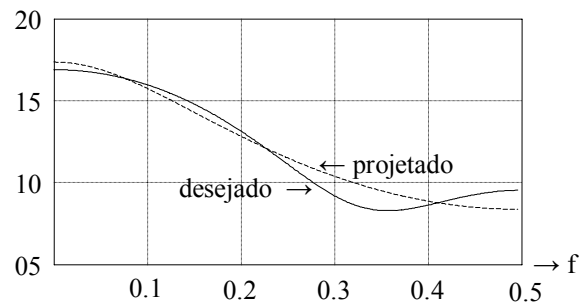
$$\varepsilon_{\min} = 1 - h(0)b_0 = 1 - 4 \cdot 0.2469 = 0.0124$$

– Portanto a transformada  $z$  do filtro FIR inverso será:

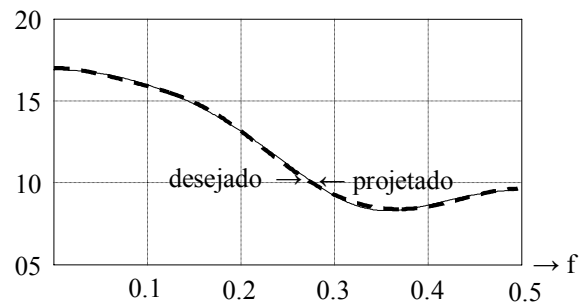
$$H(z) = \frac{1}{0.2469 - 0.1231z^{-1} + 0.0116z^{-2}} = \frac{4.0506}{1 - 0.4985z^{-1} + 0.0469z^{-2}}$$

As figuras 6.7 e 6.8 mostram as respostas de amplitude do filtro desejado (linha contínua) e o do projetado (linha tracejada) pelo método dos mínimos quadrados. Na figura 6.7 foi utilizado  $M = 3$ , como desenvolvido no exemplo acima, e na figura 6.8 foi utilizado  $M = 5$ . Observe a boa aproximação do filtro

projetado com o filtro desejado. Observe também que conforme aumentamos a ordem, melhor é a aproximação, pois o erro diminui.



**Figura 6.7:** Respostas de amplitude do filtro desejado e o do projetado pelo método dos mínimos quadrados  $M = 3$ .



**Figura 6.8:** Respostas de amplitude do filtro desejado e o do projetado pelo método dos mínimos quadrados  $M = 5$ .





## Bibliografia

- [1] Openheim, A. V. and Schafer, R. W., *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989.
- [2] Openheim, A. V. and Schafer, R. W., *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975.
- [3] Proakis, J. G. and Manolakis, D. G., *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, MacMillan, 1992.
- [4] De Fatta, D. J., Lucas, J. G. and Hodgkiss, W. S., *Digital Signal Processing: A System Approach*, John Wiley & Sons, 1988.
- [5] Diniz, Paulo S. R., Barros da Silva, E. A. e Lima Netto, S., *Processamento Digital de Sinais*, Bookman Editora, 2004.
- [6] Sheno, K., *Digital Signal Processing in Telecommunications*, Prentice-Hall, 1995.
- [7] Baher, H., *Analog and Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1990.
- [8] Burrus, C. S., McClellan, J. H., Oppenheim, A. V., Parks, T. W., Schafer, R. W. and Schuessler, H. W., *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using Matlab*, Prentice-Hall, 1994.
- [9] Parks, T. W. and Burrus, C. S., *Digital Filter Design*, John Wiley & Sons, 1987.
- [10] Zverev, A. I., *Handbook of Filter Synthesis*, John Wiley & Sons, 1967.
- [11] Joaquim, M. B., e Sartori, J. C., *Análise de Fourier*, CD-ROM – EESC-USP, 2003.
- [12] Ramirez, R. W., *The FFT: Fundamentals and Concepts*, Prentice-Hall, Inc. 1985.
- [13] Rabiner, L. R., Gold, B., and McGonegal, C. A., *An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters*, IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, vol. AU-18, pp.83-106, June, 1970.
- [14] Hayes, M. H., *Digital Signal Processing*, Schaun's Outline Series, McGraw-Hill, 1999.
- [15] Poularikas, A. D., *The Handbook Formulas and Tables for Signal Processing*, CRC Press LLC, 1999.
- [16] Parks, T. W., and McClellan J. H., *Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase*, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-19, pp. 189-194, mar., 1972.
- [17] Parks, T. W., and McClellan J. H., *A Program for the Design of Linear Phase FIR Filters*, IEEE Trans. Audio Electroacoustics, Vol. AU-20, No. 3, pp. 195-199, mar., 1972 b.
- [18] Herrmann, O., Rabiner, L. R. And Chun, D. S. K., *Practical Design Rulesfor Optimum FIR Lowpass Digital Filters*, Bell System Technical Journal, Vol 52, No. 6, pp. 769-799, july-aug. 1973.
- [19] Edited Digital Processing Committee of the IEEE, *Programs for Digital signal processing*, IEEE Press, 1979.



## Apêndice A-1

### Funções de Janelas

Quando trabalhamos com a FFT, para o estudo de espectro de sinais, deparamos com alguns problemas básicos:

- O sinal é analisado em intervalos de tempo limitados, isto é, a sequência que representa o sinal tem duração finita, por exemplo,  $N$  e a FFT assume que o sinal dentro deste intervalo se repete, como se fosse periódico.
- A FFT fornece resultados para frequências discretas separadas por  $1/N$ .

No segundo caso têm-se imposto limites na resolução espectral impostos pela duração do intervalo de análise. No primeiro caso, ocorre um efeito que é chamado de espalhamento espectral (*spectral leakage*) que resulta em uma distorção no espectro original do sinal. Espalhamento espectral significa que a energia do sinal que deveria estar concentrada em uma única frequência (como no caso de sinais senoidais), se espalha por toda a faixa de frequências. Ele está relacionado com descontinuidades que aparecem nos extremos do intervalo de medida. Este efeito é mais pronunciado em sinais repetitivos ou em sinais quase-periódicos, pois quando interrompemos o sinal podem aparecer grandes descontinuidades. Por exemplo, para uma sequência senoidal apresentar uma única raia espectral, seria necessário um número exato de períodos, caso contrário termos o espalhamento espectral no espectro de amplitude. O espalhamento espectral pode também mascarar outras componentes do sinal. Veja o exemplo na seção 4.6 do capítulo 4.

Quando se analisa um sinal, na maior parte das situações, este é segmentado em intervalos de tempo curtos, isto é, a sequência é dividida e sequências menores de tamanho  $N$ . Em seguida cada uma destas partes é analisada separadamente. Este procedimento é equivalente a multiplicar o sinal por uma função retangular de amplitude unitária dentro do intervalo de análise e amplitude nula fora deste. Em processamento de sinais chamamos esta função de janela retangular. A janela retangular apresenta descontinuidades, assim, como resultado tem-se o aparecimento de frequências indesejáveis no espectro do sinal. O espectro resultante do sinal “janelado” é a convolução do espectro da janela com o do sinal e, como as amplitudes dos lóbulos laterais do espectro da janela retangular são muito grandes este pode ficar distorcido ou ‘esconder’ sinais de frequências muito próximas. Este fenômeno é conhecido como espelhamento espectral (*leakage*).

Sinais que decrescem com o tempo, cuja forma de onda está plenamente contida na janela de análise são pouco afetados pelo *leakage*. Como dissemos, este efeito geralmente ocorre em sinais periódicos e os quase-periódicos. Para reduzir este efeito, procura-se evitar o corte abrupto da janela retangular multiplicando o sinal por outros tipos de funções ou janelas, cuja forma no tempo discreto decai suavemente a zero. Este processo é chamado em inglês de *windowing* (janelamento).

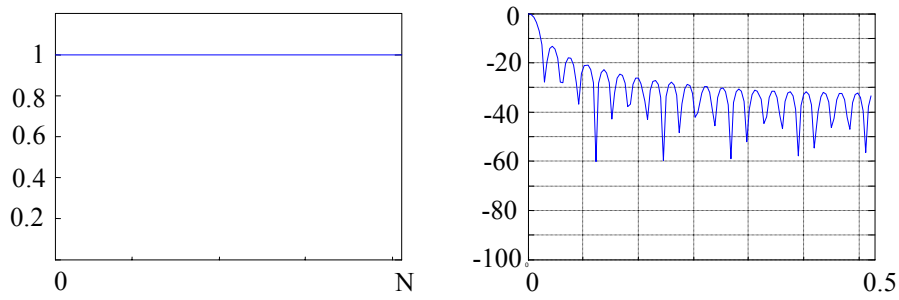
Neste apêndice são apresentadas as funções das principais janelas utilizadas em processamento digital de sinais; são também fornecidas a largura de faixa do lóbulo principal para cada janela, bem como a atenuação mínima do maior lóbulo lateral de cada uma delas.

#### 1. Janela Retangular

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N - 1 \\ 0, & c. c. \end{cases}$$

Largura de faixa da janela:  $0.86/N$

Atenuação do maior lóbulo lateral: 13.2 dB

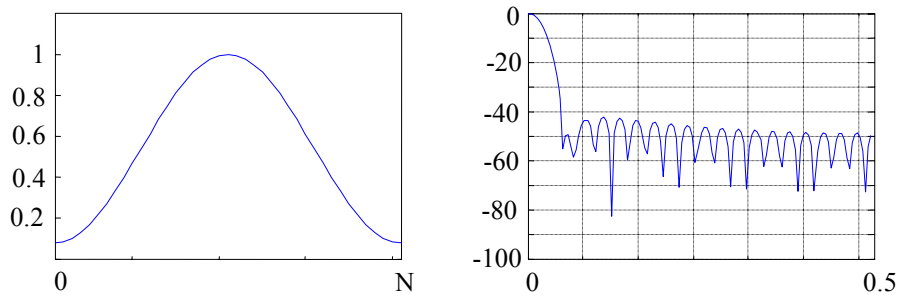


**Figura A-1.1:** Janela retangular no domínio do tempo e da frequência.

**2. Janela de Hamming**

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n < N-1 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Largura de faixa da janela:  $3.3/N$   
 Atenuação do maior lóbulo lateral: 41

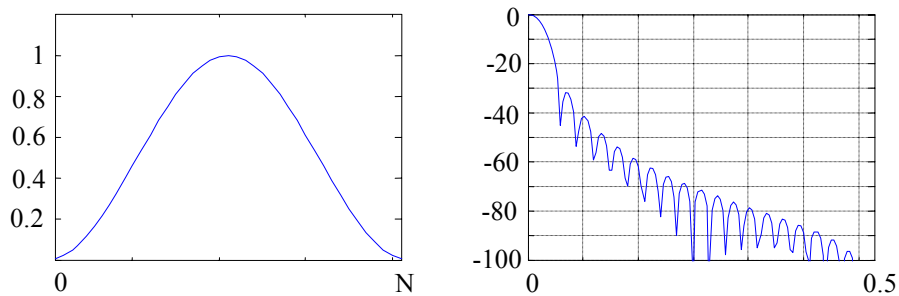


**Figura A-1.2:** Janela de hamming no domínio do tempo e da frequência.

**3. Janela de Hanning**

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n < N-1 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Largura de faixa da janela:  $3.1/N$   
 Atenuação do maior lóbulo lateral: 41 dB

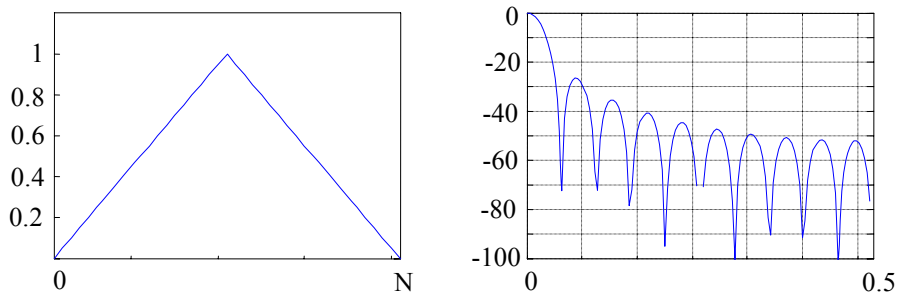


**Figura A-1.3:** Janela de hanning no domínio do tempo e da frequência.

**4. Janela de Bartlett ou Triangular**

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq (N-1)/2 \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & N/2 < n < N-1 \end{cases}$$

Largura de faixa da janela:  $1.27/N$   
Atenuação do maior lóbulo lateral: 26.7 dB

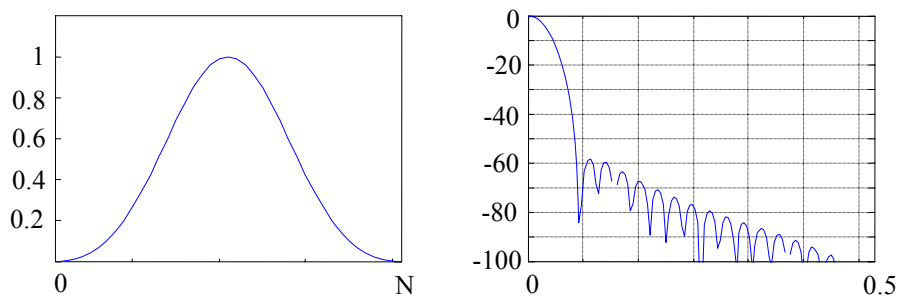


**Figura A-1.4:** Janela triangular no domínio do tempo e da frequência.

### 5. Janela de Blackman

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & c. c. \end{cases}$$

Largura de faixa da janela:  $5.5/N$   
Atenuação do maior lóbulo lateral: 57 dB



**Figura A-1.5:** Janela de Blackman no domínio do tempo e da frequência.



## Apêndice A-2

### Transformada Rápida de Fourier

#### 1. Introdução

A transformada discreta de Fourier (TDF) é uma operação importante em muitas aplicações práticas em sistemas de tempo discreto e em análise de sinais no domínio da frequência. Assim, o seu cômputo de maneira eficiente torna-se necessário em praticamente todas as aplicações de Processamento Digital de Sinais.

Para calcular a TDF existem algoritmos eficientes chamados de **Transformada Rápida de Fourier** (acrônimo do inglês FFT - *Fast Fourier Transform*). Estes algoritmos diminuem drasticamente o número de multiplicações do cálculo da DFT, aproveitando-se da periodicidade de  $W_N$ , conseguindo-se desta maneira uma eficiência muito alta no cálculo da DFT.

A TDF é igual às amostras da TF de uma sequência de N pontos tomadas em frequências igualmente espaçadas ( $w_k = 2\pi k/N$ ) no círculo de raio unitário do plano z.

Como definida anteriormente, o par de transformadas discretas de Fourier de uma sequência finita, de comprimento N é dado por:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad (1)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \quad (2)$$

em que:  $n, k = 0, 1, \dots, N-1$  e  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ .

Nas equações acima, tanto  $X(k)$ , como  $x(n)$  podem ser variáveis complexas. Portanto para calcular diretamente cada valor da TDF ou da sua inversa são necessárias N multiplicações complexas e N-1 adições complexas. Assim, para todos os N valores da transformada são requeridas no total  $N^2$  multiplicações complexas e  $N(N-1)$  adições complexas. Como cada multiplicação complexa requer 4 multiplicações reais e cada adição requer 2 adições reais, então, para cada valor da transformada são necessárias  $4N$  multiplicações e  $4N-2$  adições reais. Finalizando, no total são requeridas  $4N^2$  multiplicações e  $N(4N-2)$  adições reais.

Assim, o esforço computacional para a obtenção da TDF ou da TDFI é muito grande, além disso, também existe o requerimento de memória para armazenar os dados e os coeficientes das multiplicações por  $(W_N)^{nk}$ . Em geral considera-se que o tempo de computação da TDF é proporcional a  $N^2$  e se torna muito grande conforme N cresce, por isso é interessante encontrar algum procedimento computacional para se reduzir, principalmente o número multiplicações envolvidas no cálculo da TDF ou da TDFI.

Os coeficientes  $W_N$  apresentam duas propriedades muito importantes:

1. Periodicidade:  $W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$
2. Simetria complexa:  $W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$

Considere as seguintes somas:

- $\text{Re}\{x(n)\}\text{Re}\{W_N^{kn}\} + \text{Re}\{x(N-n)\}\text{Re}\{W_N^{k(N-n)}\} = [\text{Re}\{x(n)\} + \text{Re}\{x(N-n)\}]\text{Re}\{W_N^{kn}\}$
- $-\text{Im}\{x(n)\}\text{Im}\{W_N^{kn}\} - \text{Im}\{x(N-n)\}\text{Im}\{W_N^{k(N-n)}\} = -[\text{Im}\{x(n)\} + \text{Im}\{x(N-n)\}]\text{Im}\{W_N^{kn}\}$

Observe que com este tipo de agrupamento divide-se o número de multiplicações por 2, isto é passa-se de duas para uma multiplicação real.

Observe também que certos valores do produto  $kn$  podem conduzir os coeficientes  $(W_N)^{kn}$  ao valor -1 ou 1, eliminando assim a necessidade de multiplicação.

Os algoritmos de FFT utilizam as propriedades de  $W_N$  mostradas e exemplificadas acima. Eles são baseados na decomposição do cálculo da DFT de  $N$  pontos em sucessivas transformadas com menores números de pontos para se conseguir aproveitar das propriedades de  $W_N$  e assim, diminuir o número de multiplicações. Desse modo é possível reduzir drasticamente os cálculos para um número proporcional a  $N \log(N)$ , como será visto a seguir.

## 2. Algoritmo de Decimação no Tempo

Existem muitos algoritmos que reduzem drasticamente o tempo de cálculo da TDF. Estes algoritmos se baseiam na decomposição das TDFs em tamanhos cada vez menores e também nas propriedades de  $W_N$  citadas anteriormente. Nesta seção será apresentado, como exemplo, o algoritmo de decimação no tempo que utiliza uma sequência de comprimento  $N$  par tal que  $N=2^v$ .

No desenvolvimento deste algoritmo o primeiro passo é pegar a expressão da TDF de  $x(n)$  e dividi-la em duas novas TDFs de comprimento  $N/2$ , compostas das amostras de índices pares e ímpares de  $x(n)$ , como mostra a equação (4).

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad (3)$$

$$X(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m)W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1)W_N^{(2m+1)k} \quad (4)$$

$$X(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m)(W_N^2)^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1)(W_N^2)^{mk} \quad (5)$$

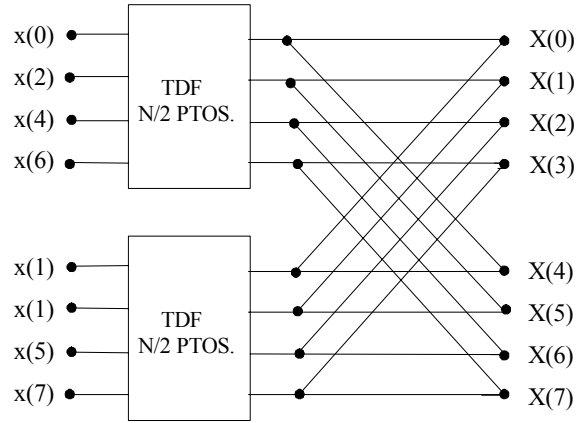
como:  $W_N^2 = e^{-2j2\pi/N} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2}$ , então a TDF de  $x(n)$  será dada por:

$$X(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m)W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1)W_{N/2}^{mk} \quad (6)$$

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k) \quad (7)$$

Observe que cada termo da equação (6 ou 7) é uma TDF de  $N/2$  pontos das sequências pares e ímpares de  $x(n)$ . Embora  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , cada termo da soma em (6) necessita ser calculado somente para  $k = 0, 1, \dots, (N/2)-1$ , pois  $G(k)$  e  $H(k)$  são periódicas e com período  $N/2$ . Após as TDFs,  $G(k)$  e  $H(k)$ , terem sido calculadas a TDF,  $X(k)$ , de  $x(n)$  é calculada de acordo com a equação (7). Este procedimento pode ser melhor visualizado com o auxílio do diagrama de fluxo mostrado na figura A-2.1, que mostra estes cálculos para uma TDF de 8 pontos.





**Figura A-2.1:** Gráfico de fluxo para uma TDF de 8 pontos dividida em duas TDFs de 4 pontos.

Anteriormente já foi observado que para uma TDF de  $N$  pontos o número necessário de multiplicações e adições complexas era de aproximadamente  $N^2$ . Como a equação (6) requer a computação de duas TDFs de  $N/2$  pontos, então elas necessitam de  $2(N/2)^2$  multiplicações complexas e aproximadamente  $2(N/2)^2$  adições complexas, e como ainda, estas duas TDFs são somadas (veja equação (6)) e requerem  $N$  multiplicações complexas por  $(W_N)^k$  e  $N$  adições complexas, conseqüentemente tem-se um total de  $N + 2(N/2)^2$  multiplicações e adições complexas. É fácil verificar que  $N + N^2/2 < N^2$ . Portanto esta decomposição em duas TDFs reduz o número de operações envolvidas; e assim pode-se esperar que se as duas TDFs de  $N/2$  pontos forem decompostas novamente pode-se reduzir ainda mais o número de operações envolvidas, como será visto a seguir.

Como  $N/2$  é par, pois  $N = 2^v$ , pode-se então decompor novamente  $G(k)$  e  $H(k)$  na equação (7) em duas novas TDFs de  $N/4$  pontos cada uma. Assim:

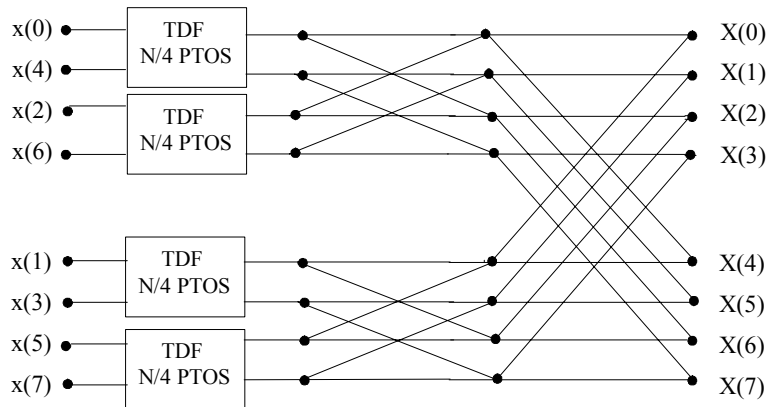
$$G(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} g(m)W_{N/2}^{mk} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l)W_{N/2}^{2lk} + \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l+1)W_{N/2}^{(2l+1)k} \quad (8)$$

$$G(k) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l)W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l+1)W_{N/4}^{lk} \quad (9)$$

Do mesmo modo para  $H(k)$  tem-se:

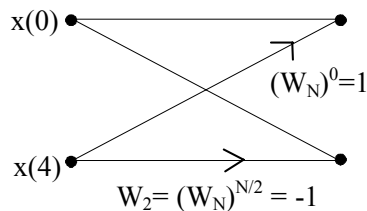
$$H(k) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} h(2l)W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{(N/4)-1} h(2l+1)W_{N/4}^{lk} \quad (10)$$

Estes cálculos são executados como é ilustrado pelo diagrama da figura A-2.2 para  $N = 8$ . Neste caso a TDF com 8 pontos é decomposta em quatro seqüências de  $N/4 = 2$  pontos. Note que  $W_{N/4} = (W_{N/2})^2 = (W_N)^4$ .



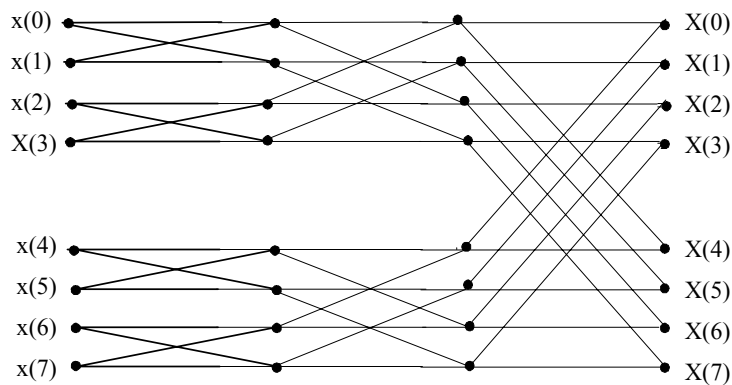
**Figura A-2.2:** Gráfico de fluxo da decomposição das TDFs de N/2 pontos em TDFs de N/4 pontos.

Para o exemplo de uma TDF de 8 pontos, o próximo passo é decompor as TDFs de N/4 pontos em TDFs de 2 pontos. A figura A-2.3 ilustra este cálculo para  $x(0)$  e  $x(4)$ . Esta é operação básica deste algoritmo, pois não se pode decompô-la em valores menores. Ela é chamada de computação *in place*, e por causa da forma do gráfico ela é conhecida como *butterfly*.



**Figura A-2.3:** Gráfico de fluxo para uma TDF de 2 pontos (Computação *in place*).

Assim o esquema completo para o cálculo de uma TDF de 8 pontos é mostrado na figura A-2.4, abaixo.



**Figura A-2.4:** Gráfico de fluxo completo para uma TDF de 8 pontos.

Para o caso mais geral, onde  $N = 2^v$  tal que  $v > 3$ , proceder-se-ia do mesmo modo que o exemplo acima, decompondo as TDFs de N/4 em N/8 pontos e assim por diante até se chegar em transformadas de 2 pontos.

Observe que este procedimento requer  $v = \log_2(N)$  estágios de computação. Quando os estágios de transformadas de N/2 pontos são decompostos em transformadas de N/4 pontos, o fator  $(N/2)^2$  é decomposto em  $N/2 + 2(N/4)^2$ , então a decomposição total requererá  $N + N + 4(N/4)^2$  multiplicações e

adições complexas. Como  $N = 2^v$  então o número total de multiplicações e adições complexas será reduzido para  $N \log_2(N)$ .

A redução no número de cálculos pode ser melhor verificada através de um exemplo. Admita que se tem uma TDF com 1024 pontos, isto é,  $v = 10$ . Neste caso os números de operações para o cálculo da TDF convencional e para a FFT serão:

- **Cálculo convencional da TDF:**  $N^2 = 2^{20} = 1.048.576 \approx 10^6$
- **Para o algoritmo acima:**  $N \log_2(N) = 1024 \log_2(1024) = 10.240 \approx 10^4$

Portanto, comparando os dois processos de cálculo verifica-se que ocorre uma redução no número de operações em aproximadamente 100 vezes; o que mostra a eficiência deste algoritmo.

### Computação *in place*.

O número de operações pode ser reduzido ainda mais, se forem exploradas as propriedades de simetria e periodicidade dos coeficientes  $W_N$ .

Observe que a figura A-2.4 é constituída de ramos que representam o mesmo cálculo. E cada estágio de computação transforma  $N$  números complexos em outro conjunto de  $N$  números complexos e este processo é repetido  $v = \log_2(N)$  vezes.

Seja  $X_m(l)$ , onde  $l = 0, 1, \dots, N-1$  e  $m = 0, 1, \dots, v$ . A sequência resultante no estágio  $m$ , tal que para  $m = 0$ , isto é, para a sequência de entrada tem-se:

$$\begin{aligned}
 X_0(0) &= x(0) \\
 X_0(1) &= x(4) \\
 X_0(2) &= x(2) \\
 X_0(3) &= x(6) \\
 X_0(4) &= x(1) \\
 X_0(5) &= x(5) \\
 X_0(6) &= x(3) \\
 X_0(7) &= x(7)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Utilizando esta notação pode-se ver que a computação básica da figura A-2.4 é:

$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^r X_m(q)
 \tag{12}$$

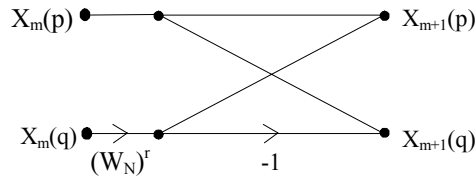
$$X_{m+1}(q) = X_m(p) + W_N^{r+N/2} X_m(q)$$

como:  $W_N^{N/2} = e^{-j\pi} = -1$ , então:

$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^r X_m(q)
 \tag{13}$$

$$X_{m+1}(q) = X_m(p) - W_N^r X_m(q)$$

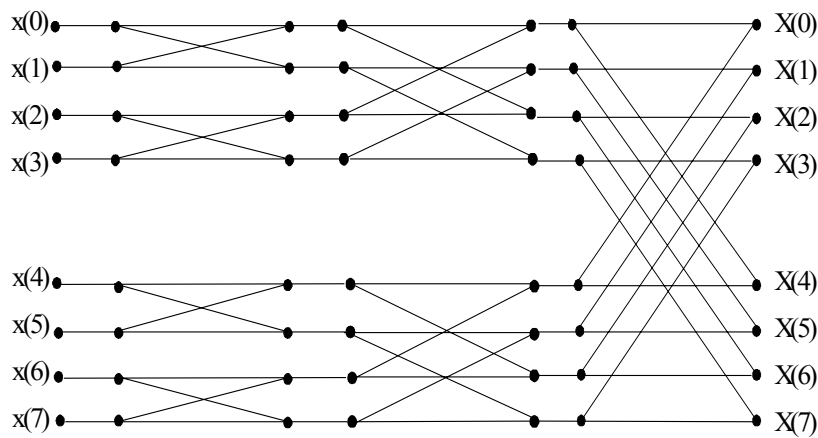
Portanto, o cálculo da equação (12) é ainda mais simplificado pela equação (13). A figura A-2.5, abaixo, mostra que agora a *butterfly* requer somente uma multiplicação complexa por  $(W_N)^r$  em vez de duas.



**Figura A-2.5:** Gráfico de fluxo de uma *butterfly* otimizada.

A equação (13) e a figura A-2.5 acima, mostra a otimização no número de operações de uma *butterfly*. Como existem no total  $N/2$  *butterflies* por estágio de cálculos e  $\log_2(N)$  estágios, então o número total de multiplicações complexas requeridas por este algoritmo será igual a  $(N/2)\log_2(N)$ .

O gráfico de fluxo que descreve este algoritmo é mostrado na figura A-2.6.



**Figura A-2.6.** Gráfico de fluxo final do algoritmo de decimação no tempo para uma TDF de 8 pontos.

### Reversão dos Bits

Como visto anteriormente os dados de entrada devem ser colocados ou armazenados em uma ordem não sequencial. É fácil de se observar que eles são armazenados na ordem de bits revertidos. Esta propriedade é melhor observada na equação abaixo.

$$\begin{aligned}
 X_0(0) &= X_0(000) = x(0) = x(000) \\
 X_0(1) &= X_0(001) = x(4) = x(100) \\
 X_0(2) &= X_0(010) = x(2) = x(010) \\
 X_0(3) &= X_0(011) = x(6) = x(110) \\
 X_0(4) &= X_0(100) = x(1) = x(001) \\
 X_0(5) &= X_0(101) = x(5) = x(101) \\
 X_0(6) &= X_0(110) = x(3) = x(011) \\
 X_0(7) &= X_0(111) = x(7) = x(111) \\
 \mathbf{X_0(pqr)} &= \mathbf{x(rqp)}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Assim, se (rqp) é a representação binária do índice n de x(n), então a posição de armazenamento de x(n) para iniciar o cálculo da TDF será (pqr), isto é, na ordem reversa dos bits. Esta observação facilita a construção de um algoritmo para armazenamento de x(n) no início.

Finalizando, uma comparação entre as equações (1) e (2) revelam que elas diferem somente por um fator multiplicativo ( $1/N$ ) e pelo sinal dos expoentes dos coeficientes  $W_N$ . Assim, este algoritmo serve também para se calcular a TDF inversa de  $x(n)$ .

### 3. Programa em Linguagem C

Função desenvolvida em linguagem C (2.0) para o algoritmo de transformada rápida de Fourier de decimação no tempo, desenvolvido acima.

```

/*****
* Transformada Rápida de Fourier *
* SN -> -1: dft direta *
* 1: dft inversa *
* N -> Nro de pontos da dft (potencia de 2) *
* sgn -> Sinal de entrada *
* fft -> Retorna a dft: 0...N-1 -> parte real *
* N...2N-1 -> parte imaginaria *
* *
* Marcelo Basílio Joaquim *
*****/

float *fft(int SN,int N, float *sgn)
{
int NI, nd2, i, i1, i2, ip, it, j, k;
float *dft, re, im, tr, ti, ur, ui, wr, wi, arg;
dft = (float *) malloc((N+N)*sizeof(float));

NI = log(N)/0.693147;
nd2 = N/2;

/* Reversao dos bits */

j = 0;
for(i=1;i<N;i++)
{
if(i<=j) {
dft[j] = *(sgn+i);
dft[j+N] = *(sgn+i+N);
dft[i] = *(sgn+j);
dft[i+N] = *(sgn+j+N);
}
k = nd2;
while((k<=j)&&(k>0)) {
j = j - k;
k = k/2;
}
j = j + k;
} /* final da reversao dos bits */

/* Algoritmo decimacao no tempo */

i1 = 1;
for(it=1;it<=NI;it++)
{
i2 = i1;
i1 = 2*i1;

```

```

ur = 1.0;
ui = 0.0;
arg = 3.141592654/i2;
wr = cos(arg);
wi = SN*sin(arg);
for(j=0;j<i2;j++)
{ i = j;
  do { ip = i + i2;
      re = dft[ip]*ur - dft[ip+N]*ui;
      im = dft[ip+N]*ur + dft[ip]*ui;
      dft[ip] = dft[i] - re;
      dft[ip+N] = dft[i+N] - im;
      dft[i] = dft[i] + re;
      dft[i+N] = dft[i+N] + im;
      i = i + i1;
    } while(i<N);
  tr = ur;
  ti = ui;
  ur = tr*wr - ti*wi;
  ui = ti*wr + tr*wi;
}
}

/* Divide a ifft por N */

if(SN == 1) for(i=0;i<N+N;i++) dft[i] /= N;
return (dft);

} /* final da funcao fft */

```

Apêndice A-3

Fórmulas e Tabelas

1. Expressões para algumas séries de potências

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^N}{1-a} & \text{se } a \neq 1 \\ N & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=k_1}^{k_2} a^n = \frac{a^{k_1} - a^{k_2+1}}{1-a} \quad \text{se } a \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{se } |a| < 1$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a^n = \frac{a^k}{1-a} \quad \text{se } |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2} \quad \text{se } |a| \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad \text{se } |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n = \frac{a(a+1)}{(1-a)^3} \quad \text{se } |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^N n = \frac{1}{2} N(N+1)$$

$$\sum_{n=0}^N n^2 = \frac{1}{6} \frac{N(N+1)(2N+1)}{2N+1}$$

$$\sum_{n=0}^N (2n-1) = N^2 - 1$$

2. Expansão em séries de potências

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad -\infty < x < \infty$$

$$a^x = e^{x \ln(a)} = 1 + x \ln(a) + \frac{(x \ln(a))^2}{2!} + \frac{(x \ln(a))^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \dots \quad |x| < 1$$

$$\ln(x) = 2 \left\{ \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right\} \quad |x| > 0$$

$$\ln(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2} \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{x-1}{x} \right)^3 + \dots \quad |x| \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\text{cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

### 3. Algumas janelas utilizadas em projetos de filtros FIR

| Janela     | Largura da transição | Pico relativo do Lóbulo lateral (dB) | Atenuação Banda de parada | Equação da janela [w(n)]<br>n = 0, 1, ..., N-1  |
|------------|----------------------|--------------------------------------|---------------------------|---|
| Retangular | 0.9/N                | -13                                  | 21                        | 1   |
| Hanning    | 3.1/N                | -31                                  | 44                        | $0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$   |
| Hamming    | 3.3/N                | -41                                  | 53                        | $0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$   |
| Blackman   | 5.5/N                | -57                                  | 74                        | $0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$ |

### 4. Tabela de pares de transformadas de Fourier para sequências

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) e^{jwn} dw$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn}$$



|    | Sequência  | Transformada de Fourier  |
|----|--|--|
| 1. | $\delta(n)$  | 1  |
| 2. | $\delta(n - n_d)$  | $e^{-j\omega n_d}$   |
| 3. | $a^n u(n) :  a  < 1$   | $\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$  |
| 4. | $u(n)$   | $\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi k)$ |
| 5. | $\frac{r^n \text{sen} \omega_0 (n+1)}{\text{sen} \omega_0} u(n) :  r  < 1$         | $\frac{1}{1 - r \cos \omega_0 e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$                     |
| 6. | $\frac{\text{sen} \omega_0 n}{\pi n}$  | $\begin{cases} 1, &  w  < \omega_0 \\ 0, & \omega_0 <  w  \leq \pi \end{cases}$      |
| 7. | $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ | $\frac{\text{sen} \omega M / 2}{\text{sen} \omega / 2} e^{-j\omega(M-1)/2}$          |
| 8. | $e^{j\omega_0 n}$  | $2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$                  |

5. Tabela de pares de transformada z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

| <b>x(n)</b>                  | <b>X(z)</b>  | <b>Região de convergência</b> |
|------------------------------|--|-------------------------------|
| $\delta(n)$                  | 1  | $z \in \mathbb{C}$            |
| $u(n)$                       | $\frac{1}{1 - z^{-1}}$   | $ z  > 1$                     |
| $a^n u(n)$                   | $\frac{1}{1 - az^{-1}}$  | $ z  >  a $                   |
| $na^n u(n)$                  | $\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$  | $ z  >  a $                   |
| $nu(n)$                      | $\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$  | $ z  > 1$                     |
| $n^2 u(n)$                   | $\frac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$                                | $ z  > 1$                     |
| $e^{an} u(n)$                | $\frac{1}{1 - e^a z^{-1}}$   | $ z  > e^a$                   |
| $\cos(w_0 n) u(n)$           | $\frac{1 - \cos(w_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(w_0)z^{-1} + z^{-2}}$                | $ z  > 1$                     |
| $\text{sen}(w_0 n) u(n)$     | $\frac{\text{sen}(w_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(w_0)z^{-1} + z^{-2}}$              | $ z  > 1$                     |
| $a^n \cos(w_0 n) u(n)$       | $\frac{1 - e^a \cos(w_0)z^{-1}}{1 - 2e^a \cos(w_0)z^{-1} + e^{2a} z^{-2}}$ | $ z  >  a $                   |
| $a^n \text{sen}(w_0 n) u(n)$ | $\frac{e^a \cos(w_0)z^{-1}}{1 - 2e^a \cos(w_0)z^{-1} + e^{2a} z^{-2}}$     | $ z  >  a $                   |
| $\frac{1}{n} u(n-1)$         | $\ln\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right)$                                     | $ z  > 1$                     |